

Münchener Universitäts-Schriften
Fachbereich Physik

Universität München — Meteorologisches Institut

Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 32

Statistische Beschreibung der
Anisotropie und Inhomogenität
der atmosphärischen Turbulenz

von
Barbara Hennemuth

Theresienstraße 37 · 8000 München 2

März 1978

Statistische Beschreibung der
Anisotropie und Inhomogenität
der atmosphärischen Turbulenz

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Lehrstuhl für Meteorologie
der
Technische Universität
München

Statistische Beschreibung der
Anisotropie und Inhomogenität
der atmosphärischen Turbulenz

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

des

Fachbereichs Physik

der Ludwig-Maximilians- Universität

München

vorgelegt von

Barbara Hennemuth

aus Fulda

Januar 1978



1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hofmann
2. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Egger

Tag der mündlichen Prüfung: 24.2.1978

Inhaltsverzeichnis	Seitenzahl
Zusammenfassung	1
1. Einleitung	2
2. Dynamische Gleichungen	6
21. Reynolds-Stress Gleichungen	7
22. Dynamische Gleichungen für die statistischen Momente und Spektralfunktionen 2. Ordnung	11
221. Bilanzgleichungen für die Prandtl-Schicht	13
222. Bilanzgleichungen für homogene Turbulenz	24
223. Bilanzgleichungen für isotrope Turbulenz	26
23. Die Vorticitygleichung	27
3. Größen und Beziehungen zur Beschreibung der groß- skaligen Struktur	31
31. Der dynamische Erzeugungsterm	32
32. Längen- und Zeitskalen	35
321. Korrelationsfunktionen	36
322. Spektralfunktionen	39
33. Einschränkungen bei der empirischen Bestimmung	41
4. Modelle für die großskalige Struktur der Turbulenz	44
41. Theoretische Modelle	44
411. Invarianten der Grobstruktur isotroper Strömungsfelder	44
412. Verallgemeinerung für nichtisotrope Strö- mungsfelder	47

42. Empirische Modelle	49
421. Das Wirbelmodell von TOWNSEND	49
422. Überblick über einige ergänzende und neuere Arbeiten zum Wirbelmodell	52
43. Übertragbarkeit der Modellvorstellungen auf die Prandtl-Schicht	59
5. Experimentelle Untersuchungen	61
51. Meßplatz	61
52. Hintergrundmessungen	62
53. Auswertung der Hintergrundmessungen zur Beschrei- bung der turbulenten Strömung	63
54. Fluktuationsmessungen	66
6. Meßergebnisse	68
61. Zeitreihen	69
62. Momente, Häufigkeitsverteilungen	72
621. Momente	72
622. Häufigkeitsverteilungen	73
623. Gemeinsame Häufigkeitsverteilungen	77
63. Varianzen, Kovarianzen	81
64. Spektren	83
641. Energiespektren	83
642. Kreuzspektren von u' und w'	88
65. Korrelationsfunktionen	92
651. Autokorrelationsfunktionen	93
652. Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w'	99
66. Kreuzspektren von Geschwindigkeitskomponenten in verschiedenen Höhen	102

661. Kreuzspektren gleicher Geschwindigkeitskomponenten	102
662. Kreuzspektren von u' und w' in verschiedenen Höhen	109
67. Kreuzkorrelationsfunktionen von Geschwindigkeitskomponenten in verschiedenen Höhen	112
671. Kreuzkorrelationsfunktionen gleicher Geschwindigkeitskomponenten	112
672. Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w' in verschiedenen Höhen	118
7. Interpretation der Meßergebnisse	121
8. Schlußanmerkungen	129
9. Literaturverzeichnis	131
10. Liste der verwendeten statistischen Begriffe und Funktionen	140
11. Liste der verwendeten Symbole	144

Zusammenfassung

Viele Vorgänge in der bodennahen atmosphärischen Grenzschicht werden von der Turbulenz bewirkt oder getragen. Dabei spielen insbesondere die großen Turbulenzstrukturen (Wirbeldimensionen $\gtrsim$ Meßhöhe) eine Rolle, die mit der mittleren Scherströmung wechselwirken und einen deutlich anisotropen und inhomogenen Charakter haben.

Zur Untersuchung der Turbulenz aus Fluktuationsmessungen bedient man sich der Statistik von Zufallsprozessen. Jede statistische Funktion beschreibt dabei einen Teilaspekt der Turbulenz, erst aus einer möglichst umfassenden Untersuchung erhält man ein Gesamtbild von den turbulenten Strukturen.

1974 wurden bei dem Freilandexperiment GREIV I bei Meppen/Ems Datensätze von Geschwindigkeitsfluktuationen in drei Höhen gewonnen. Die Längenskalen sind unterschiedlich für die Wirbel, die jeweils den Hauptanteil der Varianz von u' , v' und w' und der Schubspannung enthalten, sie nehmen mit der Höhe zu. Aussagen über die räumliche Verteilung der großskaligen Wirbel und ihre Lage im Raum erhält man im wesentlichen aus Korrelationsfunktionen zwischen Fluktuationen in verschiedenen Höhen. Sie zeigen, daß die Wirbel mit sehr flachen Neigungswinkeln nach vorn geneigt sind. Ferner ergibt sich, daß der vertikale Impulstransport vorwiegend als Abwärtstransport von hohem Impuls zu verstehen ist. Aus der Literatur entnommene Aussagen, die sich meist auf größere Höhen beziehen, bilden einen guten Anschluß.

1. Einleitung

Turbulenz ist ein in vielen Punkten noch wenig verstandenes Phänomen. Das gilt insbesondere für die atmosphärische Grenzschicht, in der unterschiedlicher Untergrund und der vielfältige Einfluß des Wettergeschehens für große Variationen der Randbedingungen sorgen. Neben theoretischen Überlegungen sind daher immer wieder Messungen von Fluktuationsgrößen bei definierten äußeren Bedingungen durchzuführen.

Die vorliegende Arbeit soll zur Erforschung und Beschreibung der bodennahen Turbulenz beitragen. Sie gliedert sich ein in die Untersuchungen im Rahmen des DFG-Schwerpunktes "Energiehaushalt und Zirkulation der Atmosphäre"; dazu wurden von der Arbeitsgruppe für Mikrometeorologie am Münchner Meteorologischen Institut etliche Arbeiten angefertigt. So konnte C.FREYTAG (1976) mit einer speziellen Meßanordnung Zeitreihen der Energiedissipation gewinnen und Aussagen über ihre statistischen Eigenschaften machen. Man kann dadurch die Vorgänge, die den Abbau von Turbulenz bewirken, besser verstehen. Im Unterschied zu dieser Arbeit, die die kleinskaligen Phänomene untersucht, befaßt sich die vorliegende Arbeit mit den großskaligen Strukturen, die etwa bei der Produktion von Turbulenz maßgeblich sind. Diese stehen in enger Wechselwirkung mit der mittleren Scherströmung und enthalten daher deren kennzeichnende Merkmale.

Den Ausgangspunkt für die Beschreibung der Turbulenz bilden die Bewegungsgleichungen, die hier für konstante Luftdichte angegeben werden. Aus ihnen gewinnt man Bilanzgleichungen für die tur-

bulente kinetische Energie und den turbulenten Impulsstrom. Die vollständigen Gleichungen enthalten eine Reihe von Termen, die zur Beschreibung der bodennahen Turbulenz weitgehend unwichtig sind und über die man wenig weiß. Man verwendet daher die sogenannte Prandtl-Schicht Näherung für zeitliche Mittelwerte (horizontale Homogenität, Stationarität), die, wie man im Experiment nachprüfen kann, für viele Betrachtungen ausreichend ist.

Es gibt einfachere Modelle, für die man Lösungsansätze der Bilanzgleichungen aus Hypothesen und gezielten Experimenten erhalten kann und die die Interpretation einzelner Terme erleichtern.

Ein häufig untersuchter Fall ist der der homogenen Turbulenz. Eine Feldgröße $\alpha(\vec{x}, t)$ heißt statistisch homogen bzgl. einer Ortskoordinate, wenn die statistischen Verteilungsfunktionen - und damit die Momente - der Größe unabhängig von der Ortskoordinate sind und alle mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen - und damit die verallgemeinerten Momente - nur von den Ortsdifferenzen abhängen. In den hier betrachteten Turbulenzfeldern sind die Feldgrößen $u_i^j(\vec{x}, t)$, $i=1,2,3$; sind sie statistisch homogen bzgl. der drei Raumrichtungen, so spricht man von homogener Turbulenz.

Noch einfacher stellt sich die isotrope Turbulenz dar. Eine Feldgröße heißt statistisch isotrop, wenn die statistischen Verteilungsfunktionen invariant gegenüber Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems sind (Richtungsunabhängigkeit). Sind die turbulenten Größen $u_i^j(\vec{x}, t)$, $i=1,2,3$ isotrop, so spricht man

man von isotroper Turbulenz.

Auch die Gleichungen für die homogene und isotrope Turbulenz sind angegeben, um auf die Differenzterme aufmerksam zu machen. Die Kenntnis der inhomogenen und anisotropen großen Turbulenzstrukturen ist wesentlich für einige Auswirkungen der Turbulenz, etwa die Ausbreitung von Beimengungen und die Windlast auf hohe Gebäude.

Weiteren Einblick in die Zusammenhänge des Turbulenzfeldes geben Korrelations- und Spektralfunktionen, die neben quantitativen Ergebnissen (Längenskalen, Neigungswinkel) auch ein Bild vom zeitlichen Ablauf und der räumlichen Verteilung der Turbulenzstrukturen liefern.

Im 2.Kapitel sind die dynamischen Gleichungen sowohl für das Modell der Prandtl-Schicht als auch für die homogene und die isotrope Turbulenz angegeben. Es wird geprüft, welche Beziehungen am ehesten Aussagen über die Anisotropie und die Inhomogenität der atmosphärischen Turbulenz liefern und welche Terme davon meßbar sind (3.Kapitel).

Vor allem aus der Strömungsmechanik sind Ansätze bekannt, die die großskalige Struktur der Turbulenz beschreiben, wobei einerseits theoretische Überlegungen und andererseits die Interpretation von Meßergebnissen die Grundlage bilden. Im 4.Kapitel werden diese Ansätze beschrieben, wovon aber nur letztere sinnvoll auf die bodennahe atmosphärische Turbulenz anwendbar sind.

Die Daten, die der vorliegenden Arbeit zugrundeliegen, wurden 1974 bei dem Freilandexperiment GREIV I im Rahmen des

DFG-Schwerpunktes "Energiehaushalt und Zirkulation der Atmosphäre" gewonnen. Der Meßaufbau wird im 5.Kapitel beschrieben.

Das 6.Kapitel stellt die eigentliche Untersuchung der großskaligen Turbulenzstruktur in der bodennahen Grenzschicht dar. Dabei waren folgende Gesichtspunkte wichtig:

- a) es sollen möglichst viele statistische Auswerteverfahren angewendet werden, um ein einigermaßen vollständiges Bild zu gewinnen,
- b) Korrelationsfunktionen und Spektren geben am besten strukturelle Zusammenhänge wieder; erstere sind bei der Beschreibung großskaliger Strukturen jedoch eindeutig vorzuziehen.

Die Ergebnisse sind im 7.Kapitel zusammengefaßt.

2. Dynamische Gleichungen

Grundlage jeder Betrachtung der atmosphärischen Turbulenz bilden die Gleichungen, die ihre Dynamik und Energetik beschreiben. Diese Gleichungen sind Bilanzgleichungen, d.h. sie geben die zeitliche Änderung des Mittelwertes einer physikalischen oder statistischen Größe (Energie, Korrelation u.ä.) durch verschiedene Terme an. Man ist bei turbulenten Strömungen mit ihrer Vielfalt an Bewegungsvorgängen selten an der Beschreibung von Momentanwerten interessiert. Daher werden die Prozesse über einen bestimmten Zeitraum gemittelt. Für mikrometeorologische Fragestellungen bietet sich ein Mittelungszeitraum von 20-60 min an, da in diesem Bereich - abgesehen von mesoskaligen Phänomenen - fast keine Bewegungsformen vorkommen (vgl. LUMLEY u. PANOFSKY (1964), S.39ff). Die Momentanwerte werden dann in der bekannten Weise in Mittelwert und Abweichung vom Mittel zerlegt, je nach der Ordnung des zu untersuchenden Momentes potenziert und wieder über den vorgegebenen Zeitraum gemittelt.

In den folgenden Gleichungen wird die Luftdichte ρ als konstant angenommen; diese Annahme vereinfacht die Gleichungen sehr stark. Dadurch wird die thermische Turbulenzerzeugung ausgeschlossen. Man kann davon ausgehen, daß trotz der Einschränkung $\rho = \text{const}$ rein dynamische Vorgänge hinreichend gut beschrieben werden. Insbesondere folgt aus dieser Annahme die Divergenzfreiheit der Strömung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad *) \quad (2.1)$$

*) Hier und im folgenden gilt die Einstein'sche Summenkonvention: über doppelt vorkommende Indices wird summiert.

21. Reynolds-Stress Gleichungen

Um die Gleichungen für den Reynolds-Stress $\overline{u'_i u'_j}$ bzw. für die spezifische turbulente kinetische Energie $\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ (im folgenden kurz als turbulente kinetische Energie oder Turbulenzenergie bezeichnet) zu erhalten, geht man vom Momentanwert der Bewegungsgleichung für die i-te Komponente aus (i=1,2,3)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (2.2)$$

Die Coriolisbeschleunigung kann vernachlässigt werden, da kleinräumige Phänomene betrachtet werden sollen.

Man subtrahiert von (2.2) die gemittelte Gleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k u'_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} \quad (2.3)$$

und erhält die Bewegungsgleichung für die turbulente Zusatzbewegung u'_i

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} u'_k u'_i - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k u'_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} \quad (2.4)$$

Diese multipliziert man mit u'_j . Umgekehrt wird die Bewegungsgleichung für u'_j mit u'_i multipliziert und beide Gleichungen addiert und gemittelt. Wegen

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} \quad (2.5)$$

erhält man die Bilanzgleichung für die Komponenten des Reynoldsschen Schubspannungstensors $\overline{u'_i u'_j}$, mit den Varianzen der turbulenten Geschwindigkeitskomponenten als Hauptdiagonalelemente. Die

Spur des Tensors stellt also die zweifache turbulente kinetische Energie dar.

In der allgemeinsten Form lautet die Gleichung für die zeitliche Änderung des Reynolds-Stress ($i,j=1,2,3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_j p'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i p'} \right) \\ = - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{u}_i - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{u}_j - \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} \\ + \frac{1}{\rho} \left(\overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{u'_i u'_j} - 2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(vgl. HINZE (1959), S.251, ROTTA (1972), S.132).

Diese Gleichung enthält Terme, die für die Beschreibung der bodennahen Turbulenz unwesentlich sind. In der Prandtl-Schicht kann man einschränkend im Mittel horizontale Homogenität annehmen, d.h. die Mittelwerte sind nur noch von x_3 abhängig. Diese Näherung wird vielfach verwendet und hat sich bewährt. Ferner sei der mittlere Windvektor $\bar{\vec{u}} = (\bar{u}_1, 0, 0)$. Dann erhält man vier Gleichungen für $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ und $\overline{u'_1 u'_3} = \overline{u'_3 u'_1}$. $\overline{u'_1 u'_2}$ und $\overline{u'_2 u'_3}$ verschwinden aus Symmetriegründen. Üblicherweise gibt man die Bilanzgleichungen für die turbulente kinetische Energie $\frac{1}{2} \overline{u_i'^2}$, $i=1,2,3$ an.

$$i=j=1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_1'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\overline{u_1'^2 u_3'}}{2} \right) = -\overline{u_1' u_3'} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{u_1'^2}}{\partial x_3^2} - \nu \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \quad (2.7a)$$

$$i=j=2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_2'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\overline{u_2'^2 u_3'}}{2} \right) = \overline{u_1' u_3'} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{u_2'^2}}{\partial x_3^2} - \nu \frac{\partial u_2'}{\partial x_k} \frac{\partial u_2'}{\partial x_k} \quad (2.7b)$$

$$i=j=3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_3'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\overline{u_3'^3}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{p' u_3'} = \overline{u_1' u_3'} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{u_3'^2}}{\partial x_3^2} - \nu \frac{\partial u_3'}{\partial x_k} \frac{\partial u_3'}{\partial x_k} \quad (2.7c)$$

$$i=1, j=3 \text{ bzw. } i=3, j=1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_1' u_3'} + \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1' u_3'^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{p' u_1'} = -\overline{u_3'^2} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} \right)} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_1' u_3'}}{\partial x_3^2} - 2\nu \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_3'}{\partial x_k} \quad (2.7d)$$

$$(a) \quad (b) \quad (c) \quad (d) \quad (e) \quad (f) \quad (g)$$

(vgl. MONIN u. YAGLOM (1971), S. 383).

Die Turbulenzenergie je Komponente bzw. die Schubspannung (a) wird vergrößert oder verkleinert durch zwei vertikale Divergenzterme, in denen einmal die Größen mit der Vertikalkomponente mitgeführt werden (b) (konvektive Diffusion) und einmal die Windkomponenten mit den Druckschwankungen wechselwirken (c). Im Mittel über die gesamte Grenzschicht verschwinden diese beiden Terme; sie tragen also insgesamt nicht zur Veränderung der Energie bzw. Schubspannung bei sondern nur zur vertikalen Umverteilung. Die Terme (d) sind Produktionsterme. Durch Wechselwirkung der Schubspannung mit der mittleren Scherung wird aus der kinetischen Energie der mittleren Strömung Turbulenzenergie erzeugt; $-\overline{u_1' u_3'} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$ hat für $\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} > 0$ stets ein positives Vor-

zeichen (s. TENNEKES und LUMLEY (1974), S.62). Der Produktions-term ist nur in der 1. Komponente vorhanden. Durch Wechselwirkung der vertikalen Windvarianz mit der mittleren Scherung wird Schubspannung erzeugt, $-\overline{u_3'^2} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$ ist negativ, vermehrt also $-\overline{u_1' u_3'}$.

Für die Bilanzgleichung der Gesamtturbulenzenergie $\frac{1}{2}(\overline{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2})$ heben sich wegen (2.1) die drei Druckterme (e) gegeneinander auf; sie bewirken daher nur eine Umverteilung der Energie auf die drei Komponenten. Die in der u_1' -Komponente erzeugte Energie wird auf u_2' und u_3' weitergegeben. Der Druckterm trägt also zum Abbau der Anisotropie bei ("tendency-to-isotropy-term"). In der Gleichung (2.7d) kann man zeigen, daß für $\overline{u_1' u_3'} < 0$ der Druckterm einen positiven Beitrag leistet (HINZE (1959), S.254).

Die letzten Terme (f) und (g) schließlich beschreiben die molekulare Reibung, wobei (f) den diffusiven und (g) den dissipativen Anteil angibt.

Man erkennt an den Bilanzgleichungen, daß es einerseits Produktions- und Vernichtungsterme gibt, (d) und (g), andererseits Umverteilungsterme, wobei (e) die Energie auf die drei Komponenten verteilt und (b), (c) und (f) die Energie in der Vertikalen umverteilen entsprechend den vertikalen Divergenzen.

Die Gleichung (2.7) läßt sich weiter vereinfachen, wenn man in allen drei Raumrichtungen homogene Turbulenz annimmt, d.h. alle die Turbulenz kennzeichnenden Größen $\overline{u_i' u_j'}$ und $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ ($i, j, k=1, 2, 3$) sind konstant. Diese Annahme läßt sich mit einer mittleren Scherströmung nur vereinbaren, wenn $\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} = \text{const.}$ ist.

Man erhält mit dieser Vereinfachung folgende vier Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\frac{u_1'^2}{2}} = - \overline{u_1' u_3'} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} - \nu \overline{\frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_1'}{\partial x_k}} \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\frac{u_2'^2}{2}} = + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \nu \overline{\frac{\partial u_2'}{\partial x_k} \frac{\partial u_2'}{\partial x_k}} \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\frac{u_3'^2}{2}} = + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \nu \overline{\frac{\partial u_3'}{\partial x_k} \frac{\partial u_3'}{\partial x_k}} \quad (2.8c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_1' u_3'} = - \overline{u_3'^2} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1'}{\partial x_3} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_3'}{\partial x_k}} \quad (2.8d)$$

(a) (d) (e) (g)

Selbstverständlich fallen in einem homogenen Turbulenzfeld die räumlichen Umverteilungsterme weg; die Turbulenzenergie wird sozusagen an der Stelle vernichtet, an der sie erzeugt wird. Der Druckterm verteilt die anisotrop erzeugte Turbulenzenergie auf die drei Komponenten.

Schließlich kann man isotrope Turbulenz annehmen, für die $\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2}$ ist. Wegen $\overline{u_1' u_3'} = 0$ reduziert sich das Gleichungssystem auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\frac{u_i'^2}{2}} = -\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}, \quad i=1,2,3. \quad (2.9)$$

In einem isotropen Turbulenzfeld gibt es keine dynamische Turbulenzerzeugung, die Gleichungen beschreiben die Vernichtung von turbulenter kinetischer Energie in Wärme (Dissipation).

22. Dynamische Gleichungen für die statistischen Momente und Spektralfunktionen 2.Ordnung

Nach der Bezeichnungsweise der Statistik stellen die dynamischen Gleichungen (2.7a) - (2.7d) die Bilanzgleichungen für die zweiten Momente der Zufallsgrößen u_i' und u_j' , also für die Varianz $\overline{u_i'^2}$

und die Kovarianz $\overline{u_i' u_j'}$ ($i, j=1, 2, 3$) dar. Sie beschreiben den Energiehaushalt und die Bilanz der Schubspannung, wichtige, die Turbulenz kennzeichnende Größen.

Bei den untersuchten Fluktuationsgrößen handelt es sich aber nicht um unabhängige Einzelereignisse, die man durch ihren Mittelwert und ihre Varianz bzw. Kovarianz kennzeichnen kann; vielmehr sind es Prozesse, bei denen die zeitliche Aufeinanderfolge und die räumliche Verteilung der Ereignisse wesentlich sind.

Nicht nur die Beziehungen zwischen turbulenten Schwankungsgrößen am selben Ort und zur selben Zeit (z.B. $\overline{u_1'^2}$ oder $\overline{u_1' u_3'}$) sind von Bedeutung, weil sie einfache physikalische Größen wie etwa die Turbulenzenergie darstellen sondern auch die Beziehungen zwischen Größen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten (z.B. $\overline{u_1'(\vec{x}, t) u_3'(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t)}$), da sie die dem Turbulenzfeld eigenen Bewegungsstrukturen und Bewegungsabläufe beschreiben. Daher muß man nicht nur die Varianz sondern auch die Autokovarianzfunktion, nicht nur die Kovarianz sondern auch die Kovarianzfunktion betrachten.

Die Bilanzgleichung für die Kovarianzfunktion $R_{ij}(\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) = \overline{u_i'(\vec{x}^*) u_j'(\vec{x}^{**})}$, $i, j=1, 2, 3$ gibt an, durch welche Größen die Kovarianz zwischen turbulenten Windschwankungen an zwei verschiedenen Orten des Raumes verändert werden kann. Man erhält so einen Einblick in die räumliche Struktur der Vorgänge.

Es gibt eine gleichwertige Darstellung, die aber kein Bild im Ortsraum sondern im Wellenzahlraum liefert; das ist die Spektralfunktion, die man als Fouriertransformierte der Kovarianzfunktion erhält. Die Verwendung der Spektralfunktion beruht auf dem Gedanken, daß man durch die Fourieranalyse ein Feld - hier

$R_{ij}(\vec{x}^*, \vec{x}^{**})$ - durch Schwingungen unterschiedlicher Wellenlängen darstellt und alle Vorgänge als Wechselwirkung zwischen Schwingungen beschreibt. In einem Turbulenzfeld mit Turbulenzstrukturen verschiedener Ausmaße ist dieses Konzept sehr gut anwendbar. Man gewinnt durch die spektrale Betrachtungsweise keine neue Information aber eine neue Interpretationsmöglichkeit.

221. Bilanzgleichungen für die Prandtl-Schicht

Es soll zunächst gezeigt werden, wie man die Bilanzgleichung für die Kovarianzfunktion der Geschwindigkeitskomponenten erhält, dann werden die Vereinfachungen für die Prandtl-Schicht vorgenommen.

Formal geht man folgendermaßen vor (s.a. LUMLEY (1964), HINZE (1959), S.256):

Man multipliziert die Bewegungsgleichung für u_i' an der Stelle $\vec{x}^*$ mit u_j' an der Stelle $\vec{x}^{**} = \vec{x}^* + \Delta\vec{x}$, multipliziert umgekehrt die Bewegungsgleichung für u_j' an der Stelle $\vec{x}^{**}$ mit u_i' an der Stelle $\vec{x}^*$, addiert beide Gleichungen und mittelt. Wegen

$$\overline{u_j'(\vec{x}^{**}) \frac{\partial}{\partial t} u_i'(\vec{x}^*)} + \overline{u_i'(\vec{x}^*) \frac{\partial}{\partial t} u_j'(\vec{x}^{**})} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{(u_i'(\vec{x}^*) u_j'(\vec{x}^{**}))} \quad (2.10)$$

liefert das die Bilanzgleichung für die Kovarianzfunktion von u_i' und u_j' in Abhängigkeit von $\vec{x}^*$ und $\vec{x}^{**}$. Mit

$$u_i'^* = u_i'(\vec{x}^*), \quad u_i'^{**} = u_i'(\vec{x}^{**}), \quad \frac{\partial}{\partial x_k^*} \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \dots \right)_{\vec{x}^*}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k^{**}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \dots \right)_{\vec{x}^{**}}$$

$$p'^* = p'(\vec{x}^*), \quad p'^{**} = p'(\vec{x}^{**})$$

lautet dann die allgemeine Gleichung für die Kovarianzfunktion

$$\overline{u_i'^* u_j'^{**}}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i^* u_j^{**}}) &= -\overline{u_i^* u_k^{**}} \frac{\partial \overline{u_j^*}}{\partial x_k^*} - \overline{u_j^{**} u_k^*} \frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_k^*} - \overline{u_k^* u_j^{**}} \frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_k^*} - \overline{u_k^{**} u_i^*} \frac{\partial \overline{u_j^*}}{\partial x_k^*} \\
 &\quad - \overline{u_j^{**} \frac{\partial}{\partial x_k^*} u_k^* u_i^*} - \overline{u_i^* \frac{\partial}{\partial x_k^*} u_k^{**} u_j^{**}} - \frac{1}{\varrho} \overline{u_j^{**} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*}} - \frac{1}{\varrho} \overline{u_i^* \frac{\partial p^{**}}{\partial x_j^*}} \\
 &\quad + \nu \overline{u_j^{**} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_k^{*2}}} + \nu \overline{u_i^* \frac{\partial^2 u_j^{**}}{\partial x_k^{**2}}}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Wegen der Inhomogenität der Turbulenz hängen die Terme nicht nur vom Abstand der beiden Punkte $\vec{x}^*$ und $\vec{x}^{**}$ ab sondern auch noch von der Lage der Punkte im Raum. Um besser zwischen den Einflüssen von Abstand und Lage im Raum unterscheiden zu können, führt man neue Variable ein

$$r_k = x_k^{**} - x_k^* \quad \text{und} \quad x_k^+ = \frac{1}{2}(x_k^* + x_k^{**}). \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnet $\vec{x}^+$ die Mittelpunkts- und $\vec{r}$ die Abstandskoordinate. Man erhält so Bilanzgleichungen für die Kovarianzfunktionen $R_{ij}(\vec{x}^+, \vec{r}) = \overline{u_i^*(\vec{x}^+ - \frac{\vec{r}}{2}) u_j^*(\vec{x}^+ + \frac{\vec{r}}{2})}$, die im allgemeinsten Fall von r_i, x_i^+ ($i=1,2,3$) abhängen.

Ebenso wie die Gleichungen für den Reynolds-Stress kann man auch (2.11) vereinfachen, indem man die Prandtl-Schicht Näherung annimmt (folgende Ableitung s. LUMLEY (1964)).

Da eine Begrenzung - die Erdoberfläche - vorhanden ist, hat man ein Windprofil mit einer höhenabhängigen Scherung; die Höhe x_3 über dem Boden ist die vorgegebene Skalierungslänge.

Die Kovarianzfunktionen hängen nun nicht mehr von x_1^+ und x_2^+ ab, wohl aber von x_3^+ ; die sechs unabhängigen Variablen reduzieren sich so auf r_1, r_2, r_3 und x_3^+ . Für eine Größe $\psi(r_1, r_2, r_3, x_3^+)$ (z.B. $\psi = \overline{u_i^* u_j^{**}}$, $\psi = \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}}$) gilt dann mit (2.12)

$$i=1,2 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i^*} = \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial x_i^*} = - \frac{\partial \psi}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i^{**}} = \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \quad (2.13a)$$

$$i=3 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3^*} = - \frac{\partial \psi}{\partial r_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3^*}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3^{**}} = \frac{\partial \psi}{\partial r_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3^*} \quad (2.13b)$$

Da x_3 selbst im folgenden nicht mehr vorkommt, soll x_3^+ mit x_3 bezeichnet werden.

Man erhält folgende Bilanzgleichung für $\overline{u_i^* u_j^{**}}$, $i, j=1,2,3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i^* u_j^{**}} = & - \delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} \left(\frac{d\bar{u}_j}{dx_3} \right)^{**} - \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*} \left(\frac{d\bar{u}_i}{dx_3} \right)^* - (\bar{u}_1^{**} - \bar{u}_1^*) \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^{**}}}{\partial r_1} \\ & - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} - \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^*}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_3^{**}} + \overline{u_i^* u_j^{**} u_3^*}) \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^* p^{**}} - \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_j^{**} p^*} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i^* p^{**}} + \delta_{i3} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j^{**} p^*} \right) \\ & + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{u_i^* u_j^{**}} + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{u_i^* u_j^{**}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Kovarianzfunktion - oder, wenn man mit $R_{ij}(\vec{0}, x_3) = \overline{u_i^* u_j^*}$ normiert, der Korrelationsfunktion - zwischen zwei Windkomponenten an verschiedenen Orten in Abhängigkeit von der Höhe über Grund.

Für $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ geht (2.14) in (2.7) über; bei der Umrechnung müssen folgende Regeln beachtet werden

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3^*} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3^{**}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r_k} = - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_k^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_k^{**}}, \quad (2.15)$$

sodaß also bspw.

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^* p^{**}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \overline{u_i^* p^{**}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k^{**}} \overline{u_i^* p^{**}} = - \frac{1}{2} p^{**} \frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_k^*} + \frac{1}{2} \overline{u_i^*} \frac{\partial p^{**}}{\partial x_k^{**}}$$

für $\vec{x}^* = \vec{x}^{**}$ übergeht in

$$- \frac{1}{2} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_k}. \quad (2.16)$$

In (2.14) sollen die drei ersten Terme weiter umgeformt werden, da sich dann ihre Wirkungsweise leichter erklären läßt. Man führt das in Bodennähe näherungsweise geltende logarithmische Windprofil ein und nimmt ferner $r_3 \ll x_3$ an. Mit

$$\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^* = \frac{u_*}{k} \frac{1}{x_3 - r_3/2}, \quad \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^{**} = \frac{u_*}{k} \frac{1}{x_3 + r_3/2} \quad (2.17a)$$

wird

$$\begin{aligned} & - \delta_{j1} \overline{u_i^* u_j^{**}} \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^{**} - \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_i^*} \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^* \\ & = - \frac{u_*}{k} \frac{\delta_{j1} \overline{u_i^* u_j^{**}} x_3 - \delta_{j1} \overline{u_i^* u_j^{**}} \frac{r_3}{2} + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_i^*} x_3 + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_i^*} \frac{r_3}{2}}{(x_3 - \frac{r_3}{2})(x_3 + \frac{r_3}{2})} \\ & \approx - \frac{u_*}{k x_3^2} ((\delta_{j1} \overline{u_i^* u_j^{**}} + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_i^*}) x_3 - (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_j^{**}} - \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_i^*}) \frac{r_3}{2}) \end{aligned} \quad (2.17b)$$

sowie

$$(\bar{u}_1^{**} - \bar{u}_1^*) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{x_3 - r_3/2}{x_3 + r_3/2} \approx - \frac{u_*}{k} \frac{r_3}{x_3}. \quad (2.18)$$

Sowohl $\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^*$ und $\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^{**}$ als auch $(\bar{u}_1^{**} - \bar{u}_1^*)$ hängen in dem hier gewählten Koordinatensystem (r_1, r_2, r_3, x_3) von x_3 und r_3 ab.

Man erhält nun folgende Bilanzgleichung für $\overline{u_i^* u_j^{**}}$ ($i, j=1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i^* u_j^{**}} &= - \frac{u_*}{kx_3} (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*}) - \frac{u_*}{2kx_3^2} (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} r_3 - \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*} r_3) \\
 &\quad (a) \qquad (b) \\
 &+ \frac{u_*}{kx_3} r_3 \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^{**}}}{\partial r_1} - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} - \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^*}) \\
 &\quad (c) \qquad (d) \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_3^{**}} + \overline{u_i^* u_j^{**} u_3^*}) - \frac{1}{g} (\frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^* p^{**}} - \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_j^{**} p^*}) \\
 &\quad (e) \qquad (f) \\
 &- \frac{1}{2g} (\delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_i^* p^{**}} + \delta_{i3} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_j^{**} p^*}) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{u_i^* u_j^{**}} \\
 &\quad (g) \qquad (h) \\
 &+ \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{u_i^* u_j^{**}}. \qquad (2.19) \\
 &\quad (i)
 \end{aligned}$$

Die Terme, die die zeitliche Änderung der Kovarianz $\overline{u_i^* u_j^{**}}$ bewirken, haben folgende Bedeutung:

$$(a) \quad - \frac{u_*}{kx_3} (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*}) \qquad (2.20)$$

beschreibt die Produktion von $\overline{u_i^* u_j^{**}}$ infolge der Wechselwirkung zwischen der Kovarianz von u_i^* und u_3^{**} mit dem mittleren Scheunungsfeld $\frac{u_*}{kx_3}$. Wegen der horizontalen Inhomogenität des mittleren Windfeldes taucht der Term nur in den Gleichungen für $\overline{u_1^* u_1^{**}}$ und $\overline{u_i^* u_1^{**}}$, $i=1,2,3$ auf. Der Term trägt stets zu einer betragsmäßigen Vergrößerung der Kovarianz bei (Messungen, Plausibilitätsüberlegungen).

$$(b) \quad - \frac{u_*}{kx_3} \frac{r_3}{2x_3} (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} - \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*}) \qquad (2.21)$$

Dieser Term stellt wie (2.20) einen Produktionsterm dar. Für

$i=j=1$ ist er nur dann von Null verschieden, wenn die Kovarianz $\overline{u_1^* u_3^{**}}$ nicht symmetrisch bzgl. $\vec{r}$ ist; das trifft für vertikale Abstände zu. Für $i \neq j$, etwa für die Kovarianz $\overline{u_1^* u_3^{**}}$ bleibt nur $-\frac{u_*}{kx_3} \frac{r_3}{2x_3} \overline{u_3^* u_3^{**}}$ übrig. Da für große r_3 die Kovarianz $\overline{u_3^* u_3^{**}}$ schließlich verschwindet, ist das Produkt $r_3 \overline{u_3^* u_3^{**}}$ für ein bestimmtes r_3 am größten, welches die vertikale Ausdehnung des Wirbels kennzeichnet.

$$(c) \quad \frac{u_*}{kx_3} r_3 \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^{**}}}{\partial r_1} \quad (2.22)$$

ist ein Transferterm, der die Divergenz bzgl. der Strukturcoordinate r_1 der mit einer mittleren Windgeschwindigkeit mitgeführten Kovarianz $\overline{u_i^* u_j^{**}}$ beschreibt; die Mitführungsgeschwindigkeit ist die Differenz der Geschwindigkeiten der betrachteten Punkte, weshalb der Term für $r_3=0$ verschwindet.

$$(d) \quad - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} - \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^*}) \quad (2.23)$$

beschreibt die Divergenz bzgl. r_k der mit u_k^* bzw. u_k^{**} mitgeführten Kovarianz. Der Term verschwindet für $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$; das bedeutet, daß er keinen Beitrag zum Reynolds-Stress liefert, er beinhaltet eine Umverteilung der Kovarianz auf die verschiedenen Verschiebungen durch Wechselwirkung von Fluktuationsgebilden (vortex-stretching) und stellt daher einen Transferterm dar.

$$(e) \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_3^{**}} - \overline{u_i^* u_j^{**} u_3^*}) \quad (2.24)$$

ist ein Advektionsterm, der die vertikale Divergenz des Austauschstromes von Kovarianz beschreibt. Der Term beinhaltet eine räumliche Umverteilung von Kovarianz; er bleibt für $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ erhalten,

verschwindet aber in homogener Turbulenz.

$$(f) \quad - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^* p'^{**}} - \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_j'^{**} p'^*} \right) \quad (2.25)$$

$$(g) \quad - \frac{1}{2\varrho} \left(\delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_i^* p'^{**}} + \delta_{i3} \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_j'^{**} p'^*} \right) \quad (2.26)$$

Hier spielt die Wechselwirkung von fluktuierendem Druckfeld und Windfeld eine Rolle. Formal sind die Terme ähnlich zu (d) und (e); (f) bedeutet also entsprechend einen Transferterm und (g) einen Advektionsterm.

(f) enthält einen Anteil, der die Kovarianz $\overline{u_i^* u_j'^{**}}$ in den Richtungen umverteilt; denn man kann zeigen, daß für $i=j$ und summiert über i

$$\frac{\partial \overline{u_i^* p'^{**}}}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_3'^{**} p'^{**}}}{\partial x_3} \quad (2.26a)$$

gilt; aus allen Termen bleibt also nur der vertikale Umverteilungsterm übrig, die anderen heben sich gegenseitig auf.

$$(h) \quad 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{u_i^* u_j'^{**}} \quad (2.27)$$

auch dieser Term stellt einen Transferterm dar, der die Divergenz bzgl. r_k eines Diffusionsstroms von Kovarianz $\nu \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{u_i^* u_j'^{**}}$ beschreibt. Formal gibt der Term die Krümmung der Kovarianzfunktion an, die - wie man aus dem Verlauf von $\overline{u_i^* u_j'^{**}}(\vec{r})$ weiß - bei kleinen Verschiebungen am größten ist. Der Transfer geschieht stets in der Richtung von größeren zu kleineren $\vec{r}$, es wird also großskalige Struktur zerstört; deshalb wird der Term üblicherweise als Dissipationsterm bezeichnet.

$$(i) \quad \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{u_i^* u_j^{**}} \quad (2.28)$$

beschreibt die Advektion von Kovarianz durch die vertikale Divergenz des molekularen Diffusionsstroms von Kovarianz.

Man erkennt, daß die Kovarianzfunktion $\overline{u_i^* u_j^{**}}(\vec{r}, x_3)$ verändert werden kann durch Produktionsterme ((a) und (b)), durch Advektionsterme ((e), (g) und (i)), die die Kovarianz in der Vertikalen umverteilen und durch Transferterme ((c), (d), (f) und (h)), die die Kovarianz unter den Verschiebungen umverteilen, wobei der Term (h) stets Kovarianz zu kleineren Strukturen transferiert und daher als Vernichtungsterm angesehen werden kann.

Aus den oben angeführten Gründen ist es sinnvoll, auch die Bilanzgleichung für die Spektralfunktion anzugeben.

Man erhält die Spektralfunktion $\Phi_{ij}(\vec{k}, \vec{x})$ als Fouriertransformierte der Kovarianzfunktion $R_{ij}(\vec{r}, \vec{x})$

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, \vec{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}, \vec{x}) e^{-i2\pi \kappa_i r_i} d\vec{r}. \quad (2.29)$$

Wegen

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\vec{k}, \vec{x}) d\vec{k} = R_{ij}(\vec{0}, \vec{x}) \quad (2.30)$$

gibt Φ_{ii} die Verteilung der Turbulenzenergie und Φ_{13} die Verteilung der Schubspannung über die Wellenzahl an.

Um die (2.19) entsprechende Bilanzgleichung für die Spektralfunktion zu erhalten, addiert man zweckmäßigerweise zu (2.19) die Bilanzgleichung für $\overline{u_i^{**} u_j^*}$. Dann zerlegt man die Kovarianzfunktionen in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen

Anteil mittels

$$R_{ij}^S = R_{ij}^+ + R_{ij}^- \quad \text{und} \quad R_{ij}^A = R_{ij}^+ - R_{ij}^- \quad (2.31a)$$

$$R_{i,jk}^S = R_{i,jk}^+ + R_{i,jk}^- \quad \text{und} \quad R_{i,jk}^A = R_{i,jk}^+ - R_{i,jk}^- \quad (2.31b)$$

$$\text{mit } R_{ij}^+ = \overline{u_i^* u_j^{**}} \quad \text{und} \quad R_{ij}^- = \overline{u_i^{**} u_j^*} = R_{ij}(-\vec{r}) \quad (2.32a)$$

$$R_{i,jk}^+ = \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} \quad \text{und} \quad R_{i,jk}^- = \overline{u_i^{**} u_j^* u_k^*} = R_{i,jk}(-\vec{r}) \quad (2.32b)$$

und bildet die Fouriertransformierte (FT) der Terme mit folgenden Regeln

$$R_{ij}^S = \iiint_{-\infty}^{\infty} Co_{ij} e^{i2\pi \vec{k} \vec{r}} d\vec{r}, \quad Co_{ij} = \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^S e^{-i2\pi \vec{k} \vec{r}} d\vec{r} \quad (2.33)$$

$$R_{ij}^A = -i \iiint_{-\infty}^{\infty} Q_{ij} e^{i2\pi \vec{k} \vec{r}} d\vec{r}, \quad -iQ_{ij} = \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^A e^{-i2\pi \vec{k} \vec{r}} d\vec{r} \quad (2.34)$$

und

$$FT\left(\frac{\partial R_{ij}^S}{\partial r_k}\right) = i\kappa_k Co_{ij}, \quad FT\left(\frac{\partial R_{ij}^A}{\partial r_k}\right) = \kappa_k Q_{ij} \quad (2.35)$$

$$FT\left(\frac{\partial^2 R_{ij}^S}{\partial r_k^2}\right) = -\kappa_k^2 Co_{ij}, \quad FT\left(\frac{\partial^2 R_{ij}^A}{\partial r_k^2}\right) = i\kappa_k^2 Q_{ij} \quad (2.36)$$

$$FT\left(\frac{\partial R_{ij}^S}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} Co_{ij}, \quad FT\left(\frac{\partial R_{ij}^A}{\partial x_k}\right) = -i \frac{\partial}{\partial x_k} Q_{ij} \quad (2.37)$$

$$FT(r_k R_{ij}^S) = i \frac{\partial}{\partial \kappa_k} Co_{ij}, \quad FT(r_k R_{ij}^A) = \frac{\partial}{\partial \kappa_k} Q_{ij}, \quad (2.38)$$

entsprechendes gilt für $R_{i,jk}^S$ und $R_{i,jk}^A$.

Damit ergibt sich folgende Gleichung für $Co_{ij}, i, j=1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} Co_{ij} = & - \frac{u_*}{kx_3} (\delta_{j1} Co_{i3} + \delta_{i1} Co_{j3}) - \frac{u_*}{2kx_3^2} (\delta_{j1} \frac{\partial Q_{i3}}{\partial k_3} + \delta_{i1} \frac{\partial Q_{j3}}{\partial k_3}) \\
 & (a) \qquad \qquad \qquad (a) \qquad \qquad \qquad (b) \\
 & - \frac{u_*}{kx_3} (\kappa_1 \frac{\partial}{\partial k_3} Co_{ij} + \kappa_1 \frac{\partial}{\partial k_3} Q_{ij}) - \kappa_k Q_{i,jk} - \kappa_k Q_{j,ik} \\
 & \qquad \qquad \qquad (c) \qquad \qquad \qquad (d) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} (Co_{i,jk} + Co_{j,ik}) - \frac{1}{\rho} (\kappa_j Q_{ip} + \kappa_i Q_{jp}) \\
 & \qquad \qquad \qquad (e) \qquad \qquad \qquad (f) \\
 & - \frac{1}{2\rho} (\delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_3} Co_{ip} + \delta_{i3} \frac{\partial}{\partial x_3} Co_{jp}) - 2\nu \kappa_k^2 Co_{ij} \\
 & \qquad \qquad \qquad (g) \qquad \qquad \qquad (h) \\
 & + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} Co_{ij} \quad . \qquad \qquad \qquad (i) \qquad \qquad \qquad (2.39)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung des Realteils des Kreuzspektrums von u'_i und u'_j für eine Wellenzahl κ . Im Fall $i=j$ ist Co_{ii} die spektrale Verteilung der turbulenten kinetischen Energie, für $i=1$ und $j=3$ (oder umgekehrt) ist Co_{13} die spektrale Verteilung des Reynolds-Stress.

Die Terme der Gleichung sind abhängig von $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ und x_3 . Sie haben dieselbe Bedeutung wie die Terme von (2.20), jedoch beschreiben sie die Änderung des Anteils der Kovarianz für eine bestimmte Wellenzahl $\vec{\kappa}$ und nicht die Änderung für eine bestimmte Verschiebung $\vec{r}$; die Interpretation erfolgt im Wellenzahlraum und nicht im Ortsraum.

Da das Cospektrum die Fouriertransformierte des symmetrischen Teils der Kovarianzfunktion ist und das Quadratspektrum die Fouriertransformierte des antisymmetrischen Teils, kann man an

den Termen direkt ablesen, welche Eigenschaften des Turbulenzfeldes eine Rolle spielen. Die Dreifachkorrelationsterme gewinnen im Wellenzahlraum eine anschaulichere Bedeutung:

Der Transferterm

$$- \kappa_k (Q_{i,jk} - Q_{j,ik}) \quad (2.40)$$

verschwindet im Mittel über alle Wellenzahlen

$$\int_0^\infty \kappa_k Q_{i,jk} d\kappa_k = 0 \quad \text{wegen} \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,jk} = 0, \quad (2.41)$$

das heißt, die Kovarianz wird nicht geändert sondern nur unter den Wellenzahlen umverteilt. Aus anderen Modellvorstellungen weiß man, daß der Transfer von kleinen zu großen Wellenzahlen geschieht. Es gibt bereits Ansätze, den Transferterm durch Funktionen von Co_{ij} zu beschreiben (vgl. etwa HEISENBERG (1948) sowie eine Zusammenstellung verschiedener Ansätze in MONIN und YAGLOM (1975), S.212ff) und vereinzelte Messungen etwa von McBEAN und ELLIOTT (1975).

Der vertikale Umverteilungsterm

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} (Co_{i,j3} + Co_{j,i3}) \quad (2.42)$$

kann im Wellenzahlraum folgendermaßen erklärt werden: ein von oben kommender Austauschstrom von Kovarianz muß, da die Längenskalen nach unten abnehmen, seine charakteristische Länge verkleinern, und so gibt es für eine bestimmte Wellenzahl κ eine vertikale Divergenz des Austauschstromes.

Auch die Wirkungsweise des Dissipationsterms

$$- 2 \nu \kappa_k^2 Co_{ij} \quad (2.43)$$

wird im Wellenzahlraum deutlich: der Term ist umso wirksamer, je größer die Wellenzahl ist.

222. Bilanzgleichungen für homogene Turbulenz

Nimmt man für die statistischen Größen räumliche Homogenität an, so fallen in (2.19) und (2.39) die vertikalen Divergenzterme weg, und die Gleichungen vereinfachen sich zu ($i, j=1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^{**}}}{\partial t} = & - \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} (\delta_{j1} \overline{u_i^* u_3^{**}} + \delta_{i1} \overline{u_j^{**} u_3^*}) - (\bar{u}_1^{**} - \bar{u}_1^*) \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^{**}}}{\partial r_1} \\ & (a) \quad (c) \\ & - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} - \overline{u_i^{**} u_j^{**} u_k^*}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^* p^{**}} - \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_j^{**} p^*} \right) \\ & (d) \quad (f) \\ & + 2 \nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{u_i^* u_j^{**}} \quad (2.44) \\ & (h) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial Co_{ij}}{\partial t} = & - \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} (\delta_{j1} Co_{i3} + \delta_{i1} Co_{j3}) - \kappa_k (Q_{i,jk} - Q_{j,ik}) \\ & (a) \quad (d) \\ & - \frac{1}{\rho} (\kappa_j Q_{ip} + \kappa_i Q_{jp}) - 2 \nu \kappa_k^2 Co_{ij} \quad (2.45) \\ & (f) \quad (h) \end{aligned}$$

(vgl. STRAKA, FIEDLER u. HINZPETER (1976), HINZE (1959), S.257ff).

Man sieht, daß folgende Terme zur Veränderung der Kovarianz bei einer bestimmten Ortsverschiebung $\vec{r}$ bzw. der spektralen Energie bei einer bestimmten Wellenzahl $\vec{k}$ beitragen:

(a) Produktion aus der mittleren Strömung und

(c) Transfer durch die Divergenz eines Mitführungsstroms von Kovarianz mit der Differenzgeschwindigkeit der beiden Punkte

Der Term (c) tritt nur in (2.44) und nicht in (2.45) auf, da seine Fouriertransformierte imaginär ist und folglich in der Gleichung für Q_{ij} steht. Für $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ geht (2.44) in die Bilanzgleichung für den Reynolds-Stress über; der Term (c) verschwindet dann, er verändert also nicht den Reynolds-Stress bzw. die Turbulenzenergie sondern vergrößert für bestimmte Verschiebungen die Kovarianz und verkleinert sie in anderen Bereichen.

(d) Ähnlich sieht es mit dem in 221. als Transferterm bezeichneten Term (d) aus (vgl. (2.40)). Er verschwindet für $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ bzw. für $\lim_{\vec{k} \rightarrow \infty} \int_0^{\vec{k}} \dots d\vec{k}$ und bewirkt folglich nur eine Umverteilung.

(f) Der Druckterm dient der Gleichverteilung auf die drei Komponenten,

(h) der Dissipationsterm schließlich stellt die Vernichtung von Kovarianz bzw. von spektraler Energie dar.

Die dynamischen Gleichungen haben für ein homogenes Turbulenzfeld eine wesentlich einfachere Gestalt als für ein inhomogenes. Eine in allen Raumrichtungen homogene Turbulenz ist allerdings nur in einer konstruierten Modellströmung vorstellbar, denn für sie existiert keine durch die Strömung selbst vorgegebene Längenskala, mit der man die Turbulenzelemente beschreiben könnte (Mischungsweglänge, Wirbelgröße o.ä.). Diese wäre nach von KÁRMÁN (s. HINZE (1959), S.284) $l \sim \frac{\partial}{\partial x_j} u_i / \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i$, was für eine homogene Turbulenz $l = \infty$ ergibt.

Jedes Turbulenzfeld, das in einem Windkanal erzeugt wird, hat einen vorgegebenen Längenmaßstab, zu dem die Turbulenzelemente in irgendeinem Zusammenhang stehen müssen. Dennoch verwendet

man häufig das Modell der homogenen Turbulenz, da es für die Bilanzgleichungen Lösungsansätze gibt und die Lösungen in Experimenten näherungsweise verifiziert werden können.

223. Bilanzgleichungen für isotrope Turbulenz

Der einfachste Fall eines turbulenten Strömungsfeldes ist der der isotropen Turbulenz. Hier ist jede Richtungsabhängigkeit verlorengegangen und somit kann keine mittlere Strömung existieren.

Die Bilanzgleichungen haben dann folgende Gestalt ($i, j=1, 2, 3$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i^* u_j^{**}} = - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i^* u_j^{**} u_k^{**}} - \overline{u_i^* u_j^{**} u_k^*}) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{u_i^* u_j^{**}} \quad (2.46)$$

(d) (h)

und

$$\frac{\partial}{\partial t} Co_{ij} = - \kappa_k (Q_{i,jk} - Q_{j,ik}) - 2\nu \kappa_k^2 Co_{ij} \quad (2.47)$$

(d) (h)

(vgl. MONIN u. YAGLOM (1975), S.124).

Die Gleichungen enthalten keinen Produktionsterm; der Druckterm ist in isotroper Turbulenz identisch Null (HINZE (1959), S.144ff). So geben für eine bestimmte Wellenzahl lediglich der Transfer und die Dissipation die Veränderung der spektralen Energie an. Im stationären Gleichgewicht liefert der Transferterm gerade soviel spektrale Energie von kleineren Wellenzahlen nach, wie der Dissipationsterm zu großen Wellenzahlen transferiert. Die Gleichungen (2.46) und (2.47) beschreiben die Vernichtung von Turbulenz.

Da die Spektralfunktionen richtungsunabhängig sind, kann man sie durch Skalarfunktionen darstellen

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) , \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (2.48)$$

mit

$$E(k) = \oint\limits_{k_i k_i = k^2} \Phi_{ii}(\vec{k}) d\sigma , \quad (2.49)$$

$$F(k) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \quad (2.50)$$

und entsprechend

$$\Phi_{i,jk}(\vec{k}) = -i F_3(k) (\delta_{jk} \frac{k_i}{k} + \delta_{ik} \frac{k_j}{k} - 2 \frac{k_i k_j k_k}{k^3}) \quad (2.51)$$

(MONIN u. YAGLOM (1975), S.51 u. S.71, HINZE (1959), S.175f).

$E(k)$ heißt dreidimensionales Energiespektrum. Damit wird (2.47) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k) = - 2 k F_3(k) - 2 \nu k^2 F(k) . \quad (2.52)$$

Das Modell der isotropen Turbulenz ist das theoretisch und experimentell am meisten untersuchte. Die experimentelle Verwirklichung ist möglich, da in jedem turbulenten Strömungsfeld die kleinsten Turbulenzelemente, die nicht mehr mit großen anisotropen Strukturen oder gar der mittleren Strömung wechselwirken, in ihrer Gesamtheit als isotrop anzusehen sind.

23. Die Vorticitygleichung

Für die Beschreibung der Zusammenhänge in der atmosphärischen Turbulenz ist eine weitere Bilanzgleichung von Bedeutung, die für die Vorticityfluktuationen. Die Vorticity oder Rotation $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ des Geschwindigkeitsfeldes hängt eng mit dem wirbelhaften Charakter der Turbulenz zusammen; eine Wellenbewegung hat verschwindende Rotation, während für turbulente Bewegung

$\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ist.

Die Bilanzgleichung für die Vorticity, die man durch Anwendung des Rotationsoperators auf die Bewegungsgleichung (2.2) erhält, lautet

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k^2} \quad (2.53)$$

Wegen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = s_{ik} + r_{ik} \quad (2.54)$$

wird $\omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ zu

$$\omega_k s_{ik} + \omega_k r_{ik} = \omega_k s_{ik}, \quad \text{da } \omega_k r_{ik} = 0 \quad (2.55)$$

(vgl. TENNEKES u. LUMLEY (1974), S.82).

Bei der Aufspaltung von ω in einen mittleren und einen turbulenten Anteil, wobei

$$\vec{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3) = (0, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, 0) \quad (2.56)$$

ist, erhält man für $\vec{\omega}$

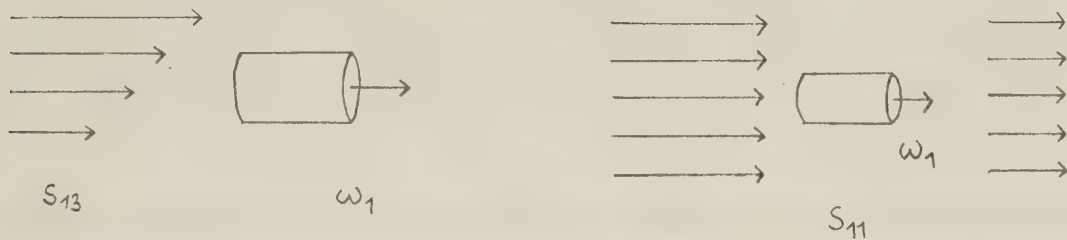
$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_2 = \overline{\omega'_k s'_{2k}} - \overline{u'_k \frac{\partial \omega'_2}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\omega}_2}{\partial x_k^2} \quad (2.57)$$

und für die fluktuierenden Vorticitykomponenten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega'_i &= \delta_{i1} \omega'_3 \bar{s}_{i3} + \delta_{i3} \omega'_1 \bar{s}_{1i} + \delta_{k2} \bar{\omega}_k s'_{ik} + \omega'_k s'_{ik} - \overline{\omega'_k s'_{ik}} \\ &- \delta_{i2} \overline{u'_k \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_k}} - \bar{u}_1 \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_1} - \overline{u'_k \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2 \omega'_i}{\partial x_k^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Terme der Form $\omega_k s_{ik}$ geben eine Vergrößerung oder Verkleinerung

bzw. eine Drehung des Vorticityvektors durch das Einwirken der Scherung an. So wird bspw. durch die Wechselwirkung zwischen einem Scherungsfeld $s_{13} = \frac{1}{2} \frac{du_1}{dx_3}$ und einem Wirbel mit der Vorticity ω_1 ω_3 erzeugt und somit eine Drehung des Wirbels bewirkt. Ein Vorticityvektor ω_1 in einem Scherungsfeld $s_{11} < 0$ wird verkleinert und für $s_{11} > 0$ vergrößert (Drehimpulserhaltung).



Es liegt nahe, anzunehmen, daß die Dimensionen der wirksamen Scherung s_{ik} größer sind als die des Wirbels mit dem Vorticityvektor ω_k . Betrachtet man s_{ik} als einen Teil - etwa den Rand - eines großen Wirbels, so stellt $\omega_k s_{ik}$ die Wechselwirkung zwischen Wirbeln unterschiedlicher Größenordnung dar, durch die die jeweils kleineren Wirbel vergrößert oder verkleinert und gedreht werden.

Dieses Wirbelbild kann man auch auf den Impuls- und Energietransportmechanismus übertragen, indem man die Vorticity in die Bewegungsgleichung und in die Energiebilanzgleichung einführt. Das geschieht mittels

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k = -\varepsilon_{ikj} u_k \omega_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} u_k^2 \right) \quad (2.59)$$

und

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = -\varepsilon_{ikj} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \quad (2.60)$$

(vgl. TENNEKES u. LUMLEY (1974), S.77).

Man erhält so die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \frac{1}{2} \rho u_k^2) + \varepsilon_{ikj} u_k \omega_j - \nu \varepsilon_{ikj} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} . \quad (2.61)$$

In einer rotationsfreien Strömung ist $\omega_j = 0$; (2.61) reduziert sich dann zur Bernoulli-Gleichung.

Gemäß (2.59) wird der Reynolds-Stress Term $\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k}$ dargestellt durch eine Wechselwirkung zwischen den Vorticity- und den Geschwindigkeitsschwankungen und durch einen dynamischen Druckgradienten.

Bildet man nun die Energiegleichung, so wird der dynamische Erzeugungsterm zu

$$\delta_{i1} \delta_{k3} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{u}_i = \delta_{i1} \delta_{k3} \varepsilon_{ikj} \bar{\omega}_k \overline{u'_i u'_k} , \quad (2.62)$$

d.h. er wird gebildet durch den mittleren Vorticityvektor, der die mittlere Scherung beschreibt und durch den Reynolds-Stress-Tensor. Im Gegensatz zum Dreifachkorrelationsterm (vortex stretching term) $\overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} u'_i u'_k}$, der sich nach (2.59) formal darstellen läßt als Wechselwirkung von Vorticityfluktuationen mit der turbulenten Strömung, kann man den Produktionsterm nicht mit Hilfe der turbulenten Vorticity beschreiben.

Man kann daraus den vorsichtigen Schluß ziehen, daß zur Erzeugung von Turbulenzenergie aus der mittleren kinetischen Energie noch nicht notwendig Wirbelstrukturen, denen man einen Vorticityvektor zuordnen kann, vorhanden sein müssen; eine Korrelation von u'_1 und u'_3 in einem Scherungsfeld reicht aus.

3. Größen und Beziehungen zur Beschreibung der großskaligen Struktur

In der Prandtl-Schicht hat man weder isotrope noch homogene Turbulenz. Es existiert ein mittleres Windprofil, wodurch ständig anisotrop Turbulenz erzeugt wird, und wegen der einseitigen Begrenzung durch die Erdoberfläche hat man in x_3 -Richtung Inhomogenität mit der vorgegebenen Skalierungslänge x_3 . Daher kommen in den dynamischen Gleichungen Divergenzterme vor, die die Energie und Kovarianz vertikal umverteilen. Diese Terme entstehen dadurch, daß entweder ein nach oben gerichteter Fluß entsprechend dem wachsenden x_3 seinen Längenmaßstab $l \sim \frac{1}{k}$ vergrößert und so spektrale Energie transportiert wird (vgl. Diskussion zu (2.42)) oder dadurch, daß für eine bestimmte Wellenzahl ein Transport in Richtung eines Gradienten stattfindet (vgl. (2.28)).

Die Differenzterme zwischen den Korrelationsgleichungen für inhomogene, homogene und isotrope Turbulenz - (2.19), (2.44) und (2.46) - die den inhomogenen und anisotropen Anteil der Turbulenz enthalten, sind gerade die Terme, die die atmosphärische Turbulenz im Unterschied zu anderen Turbulenzfeldern charakterisieren. Es ist also naheliegend, diese Differenzterme zu untersuchen, um Informationen über die für die Prandtl-Schicht charakteristischen großen Strukturen zu gewinnen. Weitere Informationen liefern die verschiedenen Längen- und Zeitmaßstäbe, die man aus den statistischen Funktionen (Korrelations-, Spektralfunktion) erhält.

31. Der dynamische Erzeugungsterm

Der Reynolds'sche Schubspannungstensor hat in der Prandtl-Schicht die Form

$$\begin{pmatrix} \overline{u_1'^2} & 0 & \overline{u_1' u_3'} \\ 0 & \overline{u_2'^2} & 0 \\ \overline{u_1' u_3'} & 0 & \overline{u_3'^2} \end{pmatrix}$$

mit $\overline{u_1'^2} > \overline{u_2'^2}$, $\overline{u_3'^2}$ und $\overline{u_1' u_3'} \neq 0$

als Ausdruck der Anisotropie.

$\overline{u_1' u_2'}$ und $\overline{u_2' u_3'}$ sind Null; wegen

der mittleren Windscherung ist

aber bspw. $u_3' > 0$ eher mit $u_1' < 0$ gekoppelt und daher $\overline{u_1' u_3'} \neq 0$ (vgl. Austauschmodell). Die Inhomogenität des mittleren Strömungsfeldes bewirkt also die Reynolds'sche Schubspannung, die ihrerseits den vertikalen Transport von mittlerem Horizontalimpuls übernimmt.

Andererseits wird durch das Zusammenwirken von Reynolds-Stress und der mittleren Windscherung kinetische Energie der mittleren Strömung in Turbulenzenergie in der u_1' -Komponente umgewandelt, diese wird durch den Druckterm weitergegeben auf die anderen beiden Komponenten. Dadurch wird die dreidimensionale turbulente Bewegung, die ja den Impulstransport aufrecht erhalten muß, ständig regeneriert gegen die ihr eigene Gesetzmäßigkeit des Zerfalls (Energietransfer zu kleinen Wirbeln) und schließlich der Dissipation.

In isotroper Turbulenz nimmt die Kovarianzfunktion $R_{ij}(\vec{r})$ eine besonders einfache Gestalt an (s. LUMLEY und PANOFSKY (1964), S.29)

$$R_{ij}(r) = \overline{u_i^* u_j^{**}} = A(r) r_i r_j + B(r) \delta_{ij} \quad (3.1)$$

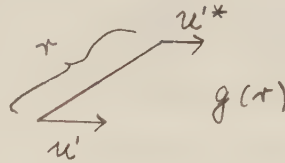
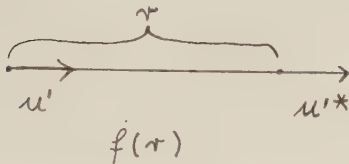
mit

$$A(r) = \frac{\overline{u'^2} f(r) - g(r)}{r^2}, \quad B(r) = \overline{u'^2} g(r) \quad (3.2)$$

und

$$f(r) = R_{11}(r, 0, 0) \quad \text{"Längskorrelation"}, \quad (3.3a)$$

$$g(r) = R_{11}(0, r, 0) \quad \text{"Querkorrelation"}. \quad (3.3b)$$



Für $\vec{r} = \vec{0}$ ist $g(0) = 1$ und $f(0) = 1$, also

$$R_{ij}(\vec{0}) = \overline{u'^2} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

d.h.

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \overline{u'^2} \quad \text{und} \quad R_{13} = 0. \quad (3.5)$$

Welche Wirbelgrößen sind es nun, die in voll entwickelter Turbulenz mit der mittleren Windscherung wechselwirken? Als Vergleichsgröße soll die für das mittlere Strömungsfeld charakteristische Größe x_3 gewählt werden. Wegen der Wirkungsweise des Druckterms kann man die kleinen Wirbel mit Ausmaßen $1 \ll x_3$ in ihrer Gesamtwirkung als isotrop ansehen, und dann ist insbesondere $\overline{u'_1 u'_3} = 0$. Die kleinen Wirbel sind also nicht in der Lage, Impuls zu transportieren und der mittleren Strömung Energie zu entziehen.

Betrachtet man nun einen dreidimensionalen Wirbel mit einer festen Koppelung zwischen u'_1 und u'_3 , so kann man ihn modellmäßig durch Vorticityvektoren darstellen.

Die vereinfachte Bilanzgleichung für die Vorticity lautet dann

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_j s_{ij} \quad (3.6)$$

(vgl. (2.53)-(2.55))

oder in Komponenten mit $s_{ij} = \bar{s}_{ij}$, also für die Prandtl-Schicht

$s_{13} = s_{31} \neq 0$, sonst $s_{ij} = 0$

$$\frac{d}{dt} \omega_1 = \omega_3 s_{13} \quad (3.7)$$



$$\frac{d}{dt} \omega_3 = \omega_1 s_{13} \quad (3.8)$$



Indem man die Gleichungen einmal addiert und einmal subtrahiert, erhält man die Lösungen

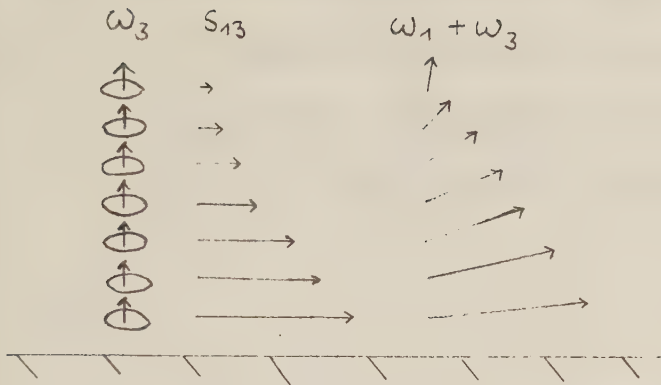
$$\omega_1 + \omega_3 = (\omega_1 + \omega_3)_0 \exp(s_{13} \Delta t), \quad \omega_1 - \omega_3 = (\omega_1 - \omega_3)_0 \exp(-s_{13} \Delta t) \quad (3.9)$$

Diese Herleitung zeigt, daß in einer mittleren Strömung $u(x_3)$ ein Wirbel mit dem Vorticityvektor ω_3 einen solchen mit ω_1 erzeugt und umgekehrt. Für $\omega_1 > 0$ und $\omega_3 > 0$ bedeutet das eine Drehung schließlich in die 45° -Richtung. Da $s_{13} > 0$ ist, verstärken sich die beiden Vorticitykomponenten ständig wechselseitig, wenn es keine Prozesse gibt, die dieses Wachstum beschränken (Transfer, Dissipation).

Den sehr kleinen, insgesamt isotrop wirkenden Wirbeln kann man keinen Wirbelvektor zuordnen, die Richtungen heben sich gegenseitig auf und daher werden sie durch die mittlere Scherung weder verstärkt noch geschwächt.

Betrachtet man einen Wirbel mit einer vertikalen Ausdehnung $l \gtrsim x_3$, so muß man die Höhenabhängigkeit der Scherung in der Prandtl-Schicht $\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \sim \frac{1}{x_3}$ beachten. Ein Anfangswirbel mit räumlich einheitlicher Wirbelstärke ω_3 erzeugt unter dem

Einfluß der Scherung



$$\omega_1 = \omega_3 s_{13} \Delta t \quad \text{mit } s_{13} \sim \frac{1}{x_3}, \quad (3.10)$$

dadurch verliert der Wirbel seine einheitliche Gestalt und ist nicht mehr zu identifizieren.

Es wird also eine bestimmte Größe von Wirbeln geben, die am wirksamsten durch die mittlere Strömung ausgerichtet werden und so am wirksamsten Energie aufnehmen können. Diese Wirbel, denen man eine Struktur zuordnen kann, die Impuls transportieren und Energie aufnehmen können, sollen als großskalige Strukturen bezeichnet werden.

Es ist also die Größe $\overline{u_1' u_3'}$ bzw. $\overline{u_1'^* u_3'^{**}}(\vec{r}, x_3)$ oder $Co_{13}(\vec{k}, x_3)$ und $Q_{13}(\vec{k}, x_3)$, welche etwas über die anisotropen Wirbel aussagt; und zwar gibt $\overline{u_1' u_3'}$ sozusagen summarisch die Wirksamkeit des Impulstransports an, während die Kovarianzfunktion etwas über die Größe der Gebilde aussagt, über die eine Beziehung zwischen u_1' und u_3' besteht, und das Cospektrum die Verteilung der Schubspannung auf die Wellenlänge angibt.

32. Längen- und Zeitskalen

Zur Charakterisierung der turbulenten Vorgänge in der Prandtl-Schicht kann man Längenskalen angeben, die bspw. die Größe

der bei einem bestimmten Vorgang - etwa dem Impulstransport - vorherrschenden Wirbel angeben. Diese Längenmaßstäbe gewinnt man aus den statistischen Funktionen, wie Korrelationsfunktion und Spektrum. Im allgemeinen kann man jeweils zwei Längenmaßstäbe erhalten, für kleinskalige und für großskalige Gebilde, Es sollen hier im wesentlichen die großen Skalen berücksichtigt werden.

Normalerweise gewinnt man aus den Messungen nur einen Zeitmaßstab, da man an einem ortsfesten Meßfühler eine Zeitreihe mißt. Nimmt man nun an, daß die Windgeschwindigkeitsschwankungen wesentlich geringer als die mittlere Windgeschwindigkeit sind, so darf man vermuten, daß die Turbulenzgebilde ebenso, wie man sie entlang der x_1 -Achse auf der Strecke L_{x_1} messen würde, unverändert während der Zeit $T = L_{x_1} / u_1$ an dem Meßfühler vorbeidriften (Taylor-Hypothese). So kann man also mit Hilfe der mittleren Windgeschwindigkeit die gemessenen Zeitfunktionen und Zeitskalen umrechnen in Ortsfunktionen und Längenskalen für die x_1 -Richtung.

321. Korrelationsfunktion

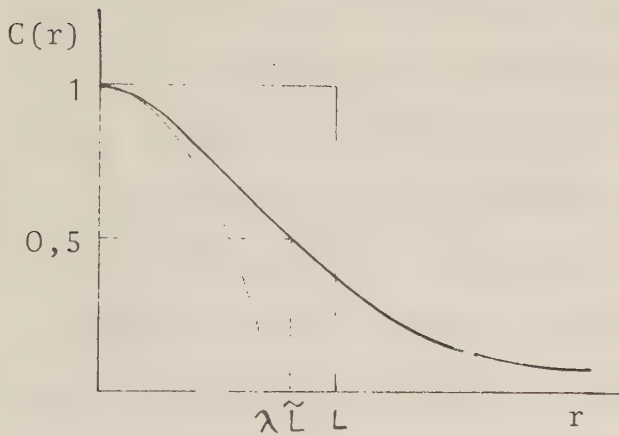
Die Autokorrelationsfunktion $C_{ii} = R_{ii} / \overline{u_i'^2}$ hat ihr Maximum $C_{ii} = 1$ stets bei $\vec{r} = \vec{0}$ und nimmt dann für größere $|\vec{r}|$ ab, bis sie schließlich Null wird für Verschiebungen, bei denen die Fluktuationen entkoppelt sind. Die Autokorrelationsfunktion ist symmetrisch in x- und y-Richtung.

Einen sehr ähnlichen Verlauf hat auch die Korrelationsfunk-

tion für zwei verschiedene Windgeschwindigkeitskomponenten.

Man kann nun für jede Verschiebungsrichtung r_k , $k=1,2,3$ eine Integralskala L definieren mittels

$$L_{ij,k} = \int_0^{\infty} C_{ij}(r_k) dr_k. \quad (3.11)$$



Sie gibt an, über ein wie großes Gebiet in der x_k -Richtung im Mittel eine Korrelation zwischen u'_i und u'_j besteht. Sind der Zeitreihe langfristige Änderungen überlagert, die man auch durch

einen einfachen linearen Trend nicht eliminieren kann, sodaß die Korrelationskurven nur sehr langsam gegen Null gehen, so erhält man eine zu große Integralskala. In diesem Fall wählt man besser die Längenskala $\tilde{L}$, für die die Kurve auf 0.5 abgefallen ist (Semiskala)

$$C_{ij}(\tilde{L}_{ij,k}) = 0.5 \quad (3.12)$$

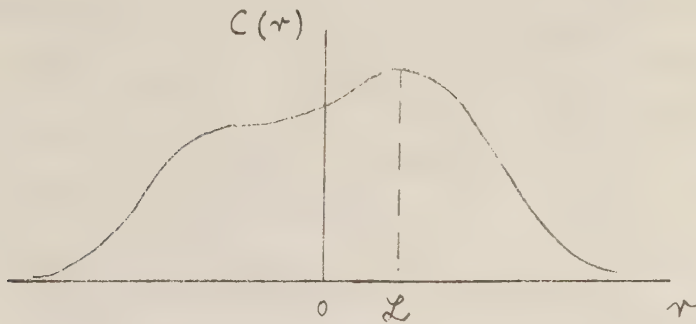
Die Ausmaße, über die die Windkomponenten merklich miteinander korreliert sind, kann man als Ausmaße eines im Mittel vorherrschenden Wirbels ansehen.

Es sei noch auf die Mikroskala hingewiesen, durch die die Krümmung im Nullpunkt definiert wird (s. Skizze).

$$-\frac{\partial^2}{\partial r_k^2} C_{ij}(r_k) = \frac{2}{\lambda_{ij,k}^2} \rightarrow \lambda_{ij,k} = \sqrt{\frac{-2}{\frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial r_k^2}}} \quad (3.13)$$

Die Mikroskala λ kann man als ein Maß für die Ausdehnung der kleinsten vorkommenden Wirbel ansehen.

Bildet man die Korrelation zwischen Windgeschwindigkeitskomponenten, die an verschiedenen Orten, etwa in zwei Höhen, gemessen wurden, für eine Verschiebung r_k , etwa in x_1 -Richtung (s. Skizze im Anhang), so wird das Maximum i.a. bei einer Verschiebung $r_1 \neq 0$

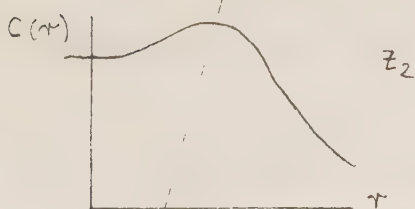
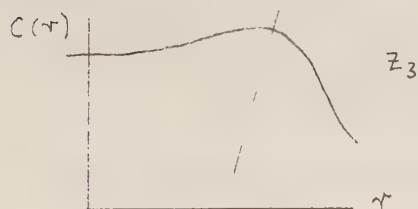


und die Kurve ist nicht symmetrisch. Hier ist das Konzept der Mikro- und Integralskala nicht anwendbar. Als Längenskala ist in diesem Fall die Verschiebung $L_{ij,k}$ wesentlich, bei der

die Korrelation maximal ist. Daraus läßt sich ein Winkel berechnen, der die Neigung - hier: Vorwärts-

oder Rückwärtsneigung - eines mittleren vorherrschenden Wirbels angibt. Hat man

Messungen in verschiedenen Höhen, so kann man feststellen, ob die Neigung höhenkonstant ist oder ob sich die Wirbel mit der Höhe aufrichten oder stärker neigen.



Entsprechend der Anisotropie wird man sowohl für die drei Komponenten als auch für die drei Raumrichtungen unterschiedliche Längenskalen erhalten und wieder andere für die Korrelationen zwischen

verschiedenen Windkomponenten. Ausdruck der Inhomogenität wird eine Höhenabhängigkeit der Skalen sein.

322. Spektralfunktionen

Die Spektralfunktionen und die daraus zu gewinnenden Längenskalen sind anders zu interpretieren. Während man aus den Korrelationsfunktionen etwas über die Ausmaße zusammenhängender Gebilde - Wirbel - erfahren kann, liefern die Spektralfunktionen ein Wellenbild. So beschreibt das Cospektrum, der Realteil des Spektrums, die gleichphasigen Anteile der beiden ursprünglichen Zeitreihen; es stellt daher das Spektrum des geraden Anteils der Kovarianzfunktion dar. Das Quadraturpektrum dagegen, der Imaginärteil des Kreuzspektrums, enthält den Anteil von Schwingungen, bei denen die beiden Prozesse einen mittleren Phasenunterschied von 90° aufweisen. Ein nicht verschwindendes Quadraturpektrum ist stets ein Indiz für eine Asymmetrie in der Strömung.

Einen Spektralwert bei einer Wellenzahl κ interpretiert man meist so, daß er die Energie eines Wirbels von den Ausmaßen $l = \frac{1}{\kappa}$ angibt (Größe des Wirbels); gleichzeitig kann man ihn auch so deuten, daß er die Amplitude des im Abstand $l = \frac{1}{\kappa}$ auftretenden Ereignissen angibt (Häufigkeit der Wirbel). Als Längenskala, die etwas über die großen Wirbel aussagt, wählt man die Wellenlänge $\Lambda = \frac{1}{\kappa}$, bei der das Spektrum sein Maximum hat.

Das Kreuzspektrum kann man nicht nur in Co- und Quadraturpektrum zerlegen

$$\phi_{ij}(\vec{\kappa}) = Co_{ij}(\vec{\kappa}) - i Q_{ij}(\vec{\kappa}) \quad (3.14)$$

sondern ebenso in Amplituden- und Phasenspektrum

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = A_{ij}(\vec{k}) e^{i\text{Ph}_{ij}(\vec{k})} \quad (3.15)$$

mit

$$A_{ij}(\vec{k}) = \sqrt{\text{Co}_{ij}(\vec{k})^2 + Q_{ij}(\vec{k})^2} \quad (3.16)$$

und

$$\text{Ph}_{ij}(\vec{k}) = \arctan \left(\frac{Q_{ij}(\vec{k})}{\text{Co}_{ij}(\vec{k})} \right) . \quad (3.17)$$

Häufig wird statt $A_{ij}(\vec{k})$ das mit Co_{ii} und Co_{jj} normierte Kohärenzspektrum

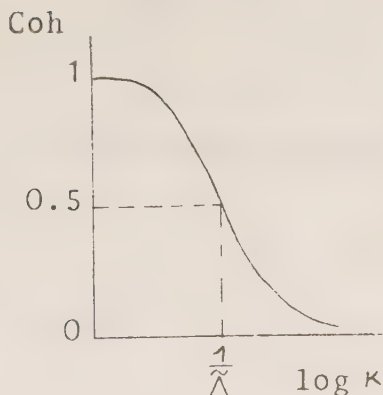
$$\text{Coh}_{ij}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\text{Co}_{ij}(\vec{k})^2 + Q_{ij}(\vec{k})^2}{\text{Co}_{ii}(\vec{k}) \text{Co}_{jj}(\vec{k})}} \quad (3.18)$$

verwendet (beachte: in der Literatur findet man sowohl für Coh_{ij} als auch für Coh_{ij}^2 die Bezeichnung Kohärenzspektrum).

Das Kohärenzspektrum gibt - ungeachtet der Phasenbeziehung - das Maß der Korrelation zwischen u_i' und u_j' bei der entsprechenden Wellenzahl an. Im Unterschied zum Cospektrum ist das Kohärenzspektrum mit den spektralen Varianzen gewichtet und beschreibt daher die Effektivität des Zusammenwirkens von u_i' und u_j' . Es können nur positive Werte vorkommen. Das Phasenspektrum beschreibt die mittlere Phasenbeziehung zwischen den beteiligten Größen.

Aus dem Kohärenzspektrum kann man Längenmaßstäbe erhalten, deren Auswahl sich nach seinem Verlauf richtet.

Beispielsweise nimmt das Kohärenzspektrum zwischen gleichen Windkomponenten u_i' in zwei verschiedenen Höhen von etwa 1 bei kleinen Wellenzahlen rasch auf sehr kleine



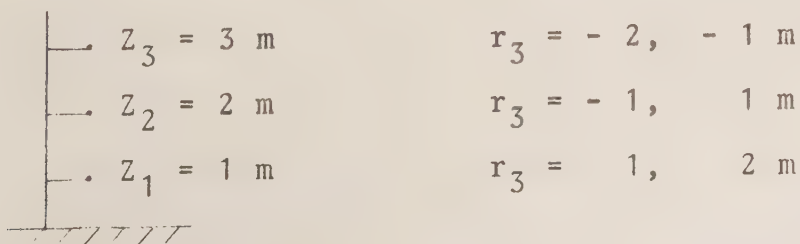
Werte bei großen Wellenzahlen ab; hier bietet sich als Längenmaßstab die Wellenlänge $\tilde{\lambda} = \frac{1}{k_{0.5}}$ an, für die die Kohärenz auf 0.5 abgenommen hat.

So gewinnt man aus den verschiedenen statistischen Funktionen verschiedene Längenmaßstäbe, die jeweils unter einen bestimmten Gesichtspunkt den physikalischen Prozeß beschreiben. Nimmt man alle Informationen zusammen, so erhält man

- a) ein Bild von der Struktur der großen Wirbel,
- b) quantitative Aussagen über die Anisotropie und Inhomogenität der atmosphärischen Turbulenz.

33. Einschränkungen bei der empirischen Bestimmung

Normalerweise gewinnt man eine Meßreihe als Zeitfunktion, die man mittels der Taylor-Hypothese in eine eindimensionale Ortsfunktion in x_1 -Richtung umwandeln kann. Allenfalls hat man noch einige Meßpunkte in vertikalem oder lateralem Abstand. Fragt man die Meßstellen in einem Zeittakt Δt ab, so erhält man Korrelationsfunktionen in r_1 -Richtung von $r_1 = \bar{u}_1 \Delta t$ bis $r_1 = \bar{u}_1 \frac{T}{10}$ (T =Meßdauer; die maximale Zeitverschiebung sollte nicht mehr als 10% der Meßdauer betragen), in r_2 - und r_3 -Richtung nur für wenige diskrete Verschiebungen, die durch die Abstände der Meßpunkte gegeben sind. Für eine Meßanordnung mit drei Sensoren in 1, 2 und 3 m Höhe erhält man bspw. folgende Verschiebungen



Da man für die Meßhöhen z_i unterschiedliche vertikale Verschiebungen hat, sind die diskreten Funktionswerte $R_{ij}(r_3)$ kaum vergleichbar und folglich die Erfassung der vertikalen Inhomogenität sehr schwierig.

Aus dieser nur sehr lückenhaften Erfassung der Kovarianzfunktion für alle drei Raumrichtungen resultiert ein Fehler in der Berechnung des Spektrums. Es ist nämlich

$$\Phi_{ij}(\vec{\kappa}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}) e^{-i2\pi\vec{\kappa}\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.19)$$

oder für $\vec{\kappa} = (\kappa_1, 0, 0)$

$$\Phi_{ij}(\kappa_1) = \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}) e^{-i2\pi\kappa_1 r_1} d\vec{r} , \quad (3.20)$$

das heißt, daß zur Berechnung der Spektralfunktion für die κ_1 -Komponente die Kenntnis der Kovarianzfunktion für alle Raumrichtungen notwendig ist. Was man aber nur erfassen kann, ist

$$F_{ij}(\kappa_1) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r_1) e^{-i2\pi\kappa_1 r_1} dr_1 , \quad (3.21)$$

und das ist wegen

$$\begin{aligned} R_{ij}(r_1) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\vec{\kappa}) e^{i2\pi\kappa_1 r_1} d\kappa \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\kappa_1 r_1} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\vec{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3 \right) d\kappa_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\kappa_1 r_1} F_{ij}(\kappa_1) d\kappa_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$F_{ij}(\kappa_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\vec{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3 . \quad (3.23)$$

Das bedeutet, daß das gemessene eindimensionale Spektrum $F_{ij}(\kappa_1)$ Energieanteile von Wellenzahlen κ_2 und κ_3 enthält, die man von denen für κ_1 prinzipiell nicht unterscheiden kann. Für den Bereich des Spektrums, für den man Isotropie annehmen kann, spielt das keine Rolle, da man hier die Beziehungen zwischen den F_{ij} und dem dreidimensionalen Spektrum aus theoretischen Überlegungen kennt. Die Fehler werden problematisch im anisotropen Bereich, wo man aus der Theorie keine Kenntnisse über den Verlauf der ϕ_{ij} hat. Man muß daher sehr vorsichtig bei der Interpretation von Spektralfunktionen bezüglich großer Strukturen sein. Grobe Informationen wie etwa die Lage des Maximums kann man dem Spektrum entnehmen, nicht aber Details des Verlaufs. Für eindeutige Aussagen über den anisotropen Bereich kann man also nur die direkt berechenbare Korrelationsfunktion benutzen.

Für den Trägheitsbereich, also bei kleineren Verschiebungen kann man für Autokorrelationsfunktionen entsprechend dem $-\frac{5}{3}$ - Gesetz für Energiespektren ein $\frac{2}{3}$ - Gesetz herleiten.

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{-2} (1 - R_{ii}(|\vec{r}|)) &= f(r, \epsilon) \\ &= c_1 \epsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

(MacCREADY (1953)), wobei ϵ die Energiedissipation ist.

4. Modelle für die großskalige Struktur der Turbulenz

Zur Untersuchung turbulenter Strömungsfelder gibt es theoretische Modelle, die Aussagen über die sogenannte Grobstruktur von Turbulenzfeldern machen, d.h. über Gebilde, deren charakteristische Länge in der Größenordnung der Skalierungslänge der mittleren Strömung (vgl. S.25 unten) oder der Geometrie der Strömung (Rohrradius o.ä.) liegt. Sie behandeln fast ausschließlich isotrope Turbulenz, die Aussagen beruhen auf Voraussetzungen, die man im Experiment kaum nachprüfen kann.

Ferner gibt es Modelle, die auf Messungen - meist im Labor durchgeführt - beruhen, hierzu wird im wesentlichen der Verlauf der Korrelationsfunktion interpretiert. Die Modelle sind teilweise umso komplizierter, je detailliertere Meßergebnisse zur Verfügung stehen.

In 41. und 42. sollen die Methoden, die zu Wirbelmodellen führen, vorgestellt werden. Diese sind am konsequentesten in Arbeiten aus der Strömungsmechanik entwickelt. In 43. soll geprüft werden, inwieweit man diese Methoden bei der Untersuchung der atmosphärischen Turbulenz in der Prandtl-Schicht übernehmen kann.

41. Theoretische Modelle

411. Invarianten der Grobstruktur isotroper Strömungsfelder

Isotrope Turbulenz, die zu einem Zeitpunkt $t = 0$ erzeugt wurde - etwa durch ein Maschengitter der Maschenweite L - durchläuft eine Geschichte (Zerfall der Wirbel, Dissipation), die durch die Korrelationsgleichung (2.46) bzw. durch die Spektralgleichung

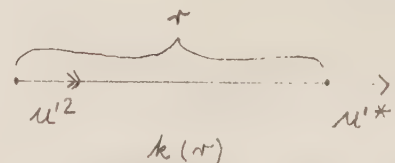
(2.47) beschrieben wird. Dabei wird die Größe der Wirbel, die die meiste Energie enthalten, wesentlich von der Art der Turbulenzerzeugung abhängen, nicht aber die größten Wirbel, deren Abmessungen groß sind im Vergleich zur vorgegebenen Längenskala der Strömung. Über diese Wirbel, die sog. Grobstruktur kann man allgemeine Aussagen machen.

Interessiert man sich für den Verlauf des Energiespektrums $E(k)$ in der Nähe von $k = 0$, so ist das gleichbedeutend mit Aussagen über Integralmomente der Korrelationsfunktionen $\int_0^\infty R_{ij} \dots dr$ (vgl. (2.13)).

LOITSIANSKII ging dabei folgenden Weg (s. ROTTA (1972), S.101): Die von KÁRMÁN-HORWARTHSche Gleichung für die Längskorrelation $f(r)$ in einem isotropen Turbulenzfeld

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f(r)) &= (u'^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} k(r) + \frac{4k(r)}{r} + 2\nu u'^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) + \frac{4}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \right) \\ &= (u'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 k(r)) + 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \frac{\partial f(r)}{\partial r}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei $k(r) = R_{11,1}(r,0,0)$ die longitudinale Dreifachkorrelation ist, wird mit r^4 multipliziert und das Integral $\int_0^\infty \dots dr$ gebildet (das entspricht der Bildung des 4.Momentes). So erhält man unter der Annahme



$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^4 \frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0 \quad (4.2)$$

(s. HINZE (1959), S.170) und einer Abnahme von $k(r)$ für $r \rightarrow \infty$, die stärker als r^{-4} ist,

$$\int_0^\infty r^4 f(r) dr = \Lambda = \text{const.} \quad (4.3)$$

Λ ist die LOITSIANSKII-Invariante; sie gibt den Gesamtgehalt an Wirbeln an, die letzten Endes durch die Turbulenzproduktion entstanden sind. Dieser Gehalt bleibt zeitlich konstant.

Eine Gleichung, die die Beziehung zwischen den Integralmomenten der Korrelationsfunktion $f(r)$ und dem Energiespektrum $E(\kappa)$ für $\kappa \rightarrow 0$ angibt (ROTTA (1972), Gl.(2.179)), liefert

$$E(\kappa) = \frac{\Lambda}{3\pi} \kappa^4 + \dots \quad (4.4)$$

Für kleine κ steigt das Energiespektrum mit κ^4 an und bleibt während der gesamten Geschichte, die die Turbulenz von ihrer Produktion bis zur Vernichtung durchläuft, konstant. Daraus kann man die Existenz großer permanenter Wirbel herleiten, die nicht mit der "übrigen Turbulenz" wechselwirken.

Unter schwächeren Voraussetzungen kann man eine andere Invariante der Grobstruktur herleiten (ROTTA (1972), S.102), indem man nämlich die von KARMAN-HORWARTHSche Gleichung mit r^3 multipliziert und den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ vollzieht; dann ist unter der Annahme, daß $k(r)$ für wachsendes r rascher als r^{-2} abnimmt, die Größe

$$B = u'^2 \lim_{r \rightarrow \infty} (r^3 f(r)) = u'^2 \int_0^\infty r^2 f(r) dr = \text{const} \quad (4.5)$$

von der Zeit unabhängig. B ist die BIRKOFF'sche Invariante. Das Energiespektrum hat dann die Form

$$E(\kappa) = \frac{B}{\pi} \kappa^2 + \dots \quad (4.6)$$

Man erhält also Aussagen über die zeitliche Konstanz der größten Wirbel unter bestimmten Annahmen über das Abklingen der Dreifachkorrelation in Längsrichtung. Eine experimentelle Nachprüfung von $k(r) \sim r^{-m}$ oder $E(\kappa) \sim \kappa^n$ ist aber wegen der

Genauigkeit der Messungen kaum möglich.

Man kann die Herleitung von BIRKHOFF verallgemeinern und erhält dann Koeffizienten C für $E \sim \kappa^C$, die aber zwischen $C = 2$ (BIRKHOFF) und $C = 4$ (LOITSIANSII) liegen müssen.

412. Verallgemeinerung für nichtisotrope Strömungsfelder

Die Invarianten der Grobstruktur kann man auch erhalten, indem man von der Spektralgleichung ausgeht

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\kappa, t) = -2\kappa F_3(\kappa, t) - 2\nu\kappa^2 F(\kappa, t) \quad (2.52)$$

Man entwickelt nun die Terme dieser Gleichung in eine Taylor-Reihe um $\kappa = 0$ der Form

$$F(\kappa, t) = f_1(t)\kappa + f_2(t)\kappa^2 + \dots \quad (4.7)$$

So erhält man Aussagen über das asymptotische Verhalten der Funktionen für kleine Wellenzahlen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f_1\kappa + f_2\kappa^2 + \dots) &= -2(g_1\kappa^2 + g_2\kappa^3 + \dots) \\ &\quad - 2\nu(f_1\kappa^3 + f_2\kappa^4 + \dots) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wegen

$$g_1 = \left. \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=0} \sim \int_0^\infty r k(r) dr = 0 \quad (4.9)$$

ist die rechte Seite von der Größenordnung κ^3 (BATCHELOR (1956), S.91), was für kleine κ heißt

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2 = 0 \quad \text{oder} \quad f_2 = \text{const.} \quad (4.10)$$

Das bedeutet, daß $E(k) = F(k) 4\pi k^2 = f_2 4\pi k^4$ (4.11)

und $\int_0^\infty r^4 f(r) dr = \Lambda = \text{const.}$ (4.12)

(MONIN u. YAGLOM (1975), S.147 ff) (vgl. (4.3) und (4.4)).

Diese Herleitung kann man nun verallgemeinern für den Fall einer nichtisotropen aber homogenen Turbulenz mit der Spektralgleichung (ohne Produktionsterm) (BATCHELOR (1959), S.91)

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{ij}(\vec{k}, t) = \Gamma_{ij}(\vec{k}, t) + \Pi_{ij}(\vec{k}, t) - 2\nu k^2 F_{ij}(\vec{k}, t) \quad (4.13)$$

wobei

$$\Gamma_{ij}(\vec{k}, t) = i k_1 (F_{i1,j}(\vec{k}, t) - F_{j1,i}(\vec{k}, t)) \quad (4.14)$$

und

$$\Pi_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{i}{\rho} (k_j F_{ip}(\vec{k}, t) - k_i F_{jp}(\vec{k}, t)) \text{ ist.} \quad (4.15)$$

Dann erhält man eine Serie von Erhaltungssätzen entsprechend der Entwicklung

$$F_{ij}(\vec{k}, t) = f_{ij,mn} k_m k_n \dots \quad (4.16)$$

der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{ij,mn} = 0 \quad \text{oder} \quad f_{ij,mn} = \text{const.} \quad (4.17)$$

und für die Korrelationsfunktionen

$$\int_0^\infty r_m r_n R_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} = \Lambda_{ij,mn} = \text{const.} \quad (4.18)$$

Die Spektralfunktionen $F_{ij}(\vec{k})$ hängen dann von allen k_i und von gewissen zeitlichen Konstanten $f_{ij,mn}$ ab.

Alle diese Herleitungen von Invarianten der Grobstruktur gehen von einer einmal erzeugten und dann zerfallenden Turbulenz aus.

Selbst LUMLEY (1966), der verallgemeinerte LOITSIANSKII-Invarianten für inhomogene Turbulenzfelder herleitet, geht aus von inhomogen erzeugter und dann zerfallender Turbulenz. LUMLEY erhält Invarianten für die Grenzschicht als Ganzes, nämlich

$$\int_0^{\infty} r_m r_n \widetilde{R}_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} = \text{const.} \quad (4.20)$$

mit

$$\widetilde{R}_{ij}(\vec{r}) = \int_0^{\infty} R_{ij}(\vec{r}, x_3) dx_3, \quad (4.21)$$

falls man nur Inhomogenität in x_3 -Richtung hat. Für die longitudinale Korrelation erhält er

$$u_1'^2 \int_0^{\infty} r^4 \widetilde{f}(r) dr = \text{const.} \quad (4.22)$$

wobei $\widetilde{f}(r)$ über die Grenzschicht integriert ist.

42. Empirische Modelle

421. Das Wirbelmodell von TOWNSEND

Einen wesentlichen Fortschritt in der modellmäßigen Behandlung großskaliger Strukturen erzielt TOWNSEND (1956). Er behandelt turbulente Nachlaufströmungen, Freistrahler und Scherströmungen in Rohren und Kanälen. Um die Ergebnisse auf die atmosphärische Grenzschicht übertragen zu können, genügt die Behandlung letzterer.

TOWNSEND nimmt an, daß man die turbulente Bewegung in Scherströmungen in zwei verschiedene Bewegungstypen aufteilen kann:

- a) Die kleinskalige Bewegung, die den Hauptanteil der kinetischen Energie enthält und kaum noch von der mittleren Stömung beeinflußt wird; die Dynamik dieser

kleinen Wirbel wird bestimmt durch die Wechselwirkung zwischen Wirbeln unterschiedlicher Größe ($\rightarrow$ Transferterm).

- b) Die großen permanenten Wirbel, die eine einfache Struktur haben, sie sind für den Impulstransport maßgebend und enthalten wenig Energie. Sie entstehen aus zufälligen Konfigurationen turbulenter Bewegung, ihr Vorticityvektor weist in die Richtung der mittleren Scherung (45°).

Man gewinnt Aussagen über die großskaligen Strukturen aus dem Verlauf der Korrelationsfunktionen für große $\vec{r}$. Diese Kurven fallen für r_2 und r_3 wesentlich rascher ab als für r_1 , was auf eine große Erstreckung der Gebilde in Strömungsrichtung hinweist (s. Abb. 4.1). $R_{11}(0,0,r_3)$ ist stets positiv, der Rückfluß von u'_1 findet in x_2 -Richtung statt, was einer Rotation um eine vertikale Achse entspricht. TOWNSEND gibt einen Ansatz für die turbulenten Fluktuationen an

$$u'_1 = A \alpha^2 x_2 x_3 e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 (x_2^2 + x_3^2)} \quad (4.23a)$$

$$u'_2 = A(1 - \alpha^2 x_3^2) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 (x_2^2 + x_3^2)} \quad (4.23b)$$

$$u'_3 = -u'_1 \quad (4.23c)$$

Das stellt Wandwirbel dar, die in x_1 -Richtung unbegrenzt sind. Die Korrelation zwischen u'_1 und u'_3 ist so, daß sie Energie aus der mittleren Strömung entziehen kann (s. Abb. 4.2).

Nimmt man an, daß die turbulente Bewegung gleichmäßig von solchen Wirbeln und freien kleinen Wirbeln zusammengesetzt ist, so erhält man mit (4.23) die transversalen Korrelationsfunktionen

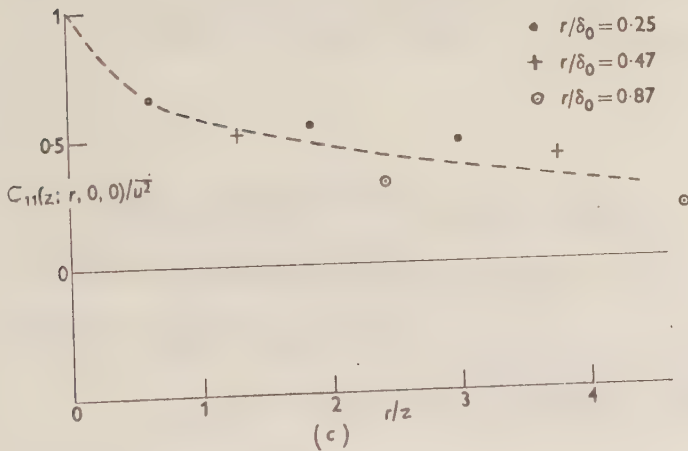
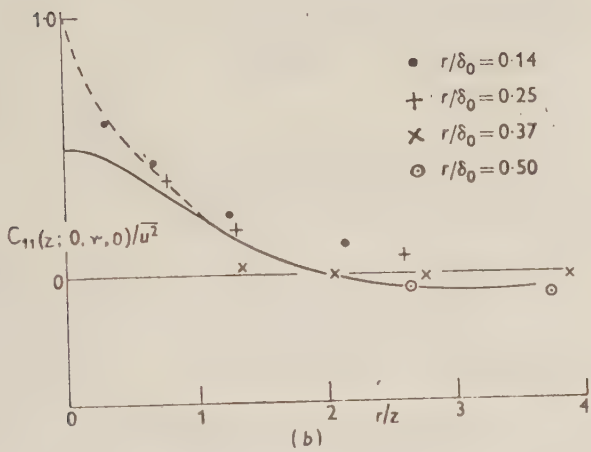
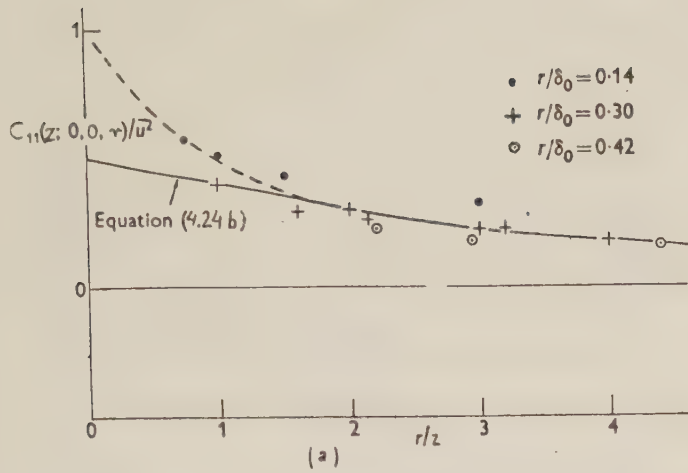


Abb. 4.1

Gemessene und berechnete Autokorrelationsfunktionen für die u_1' -Komponente in einer Scherströmung in Abhängigkeit von $\frac{r}{z}$ (δ_0 Grenzschichtdicke)

- a) für vertikale,
- b) für laterale und
- c) für longitudinale Verschiebungen.

(nach TOWNSEND (1956))

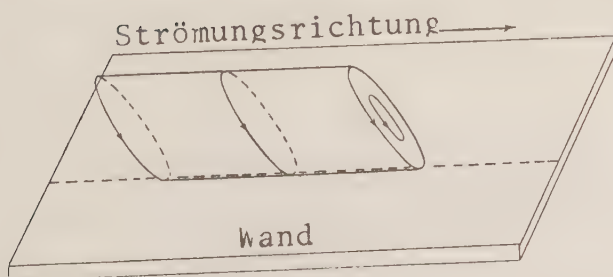


Abb. 4.2

Wandwirbel nach TOWNSEND

$$R_{11}(0, r_2, 0) = \frac{1}{2} \overline{u_1^2} \frac{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r_2}{z} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r_2}{z} \right)^2 \right)^2} \quad (4.24a)$$

und

$$R_{11}(0, 0, r_3) = \frac{1}{2} \overline{u_1^2} \frac{1 + \frac{r_3}{z}}{1 + \frac{r_3}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_3}{z} \right)^2}, \quad (4.24b)$$

die bis auf die kleinskaligen Anteile mit den gemessenen Kurven übereinstimmen (durchgezogene Linie in Abb. 4.1).

422. Überblick über einige ergänzende und neuere Arbeiten zum Wirbelmodell

Der grundlegenden Arbeit von TOWNSEND folgten viele nach, die das Wirbelmodell zu ergänzen oder zu verbessern suchten. Fast alle gehen von gemessenen Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeitskomponenten aus.

GRANT (1958) gibt Messungen der 9 Komponenten des Korrelationstensors $C_{ii}(r_j)$, $i, j=1, 2, 3$ für eine turbulente Grenzschicht an. Einen Wirbel bezeichnet er als das Gebiet, über das eine Korrelation besteht. Eine hohe Korrelation deutet auf viele oder sehr intensive Wirbel hin. Wird sie negativ, so findet ein Rückfluß statt; dieser wird im wesentlichen von großen Wirbeln getragen.

GRANT (1958) unterscheidet in der turbulenten Grenzschicht wegen des unterschiedlichen Verlaufs der Korrelationskurven in verschiedenen Wandabständen eine innere und eine äußere Schicht (s. Abb. 4.3 und 4.4).

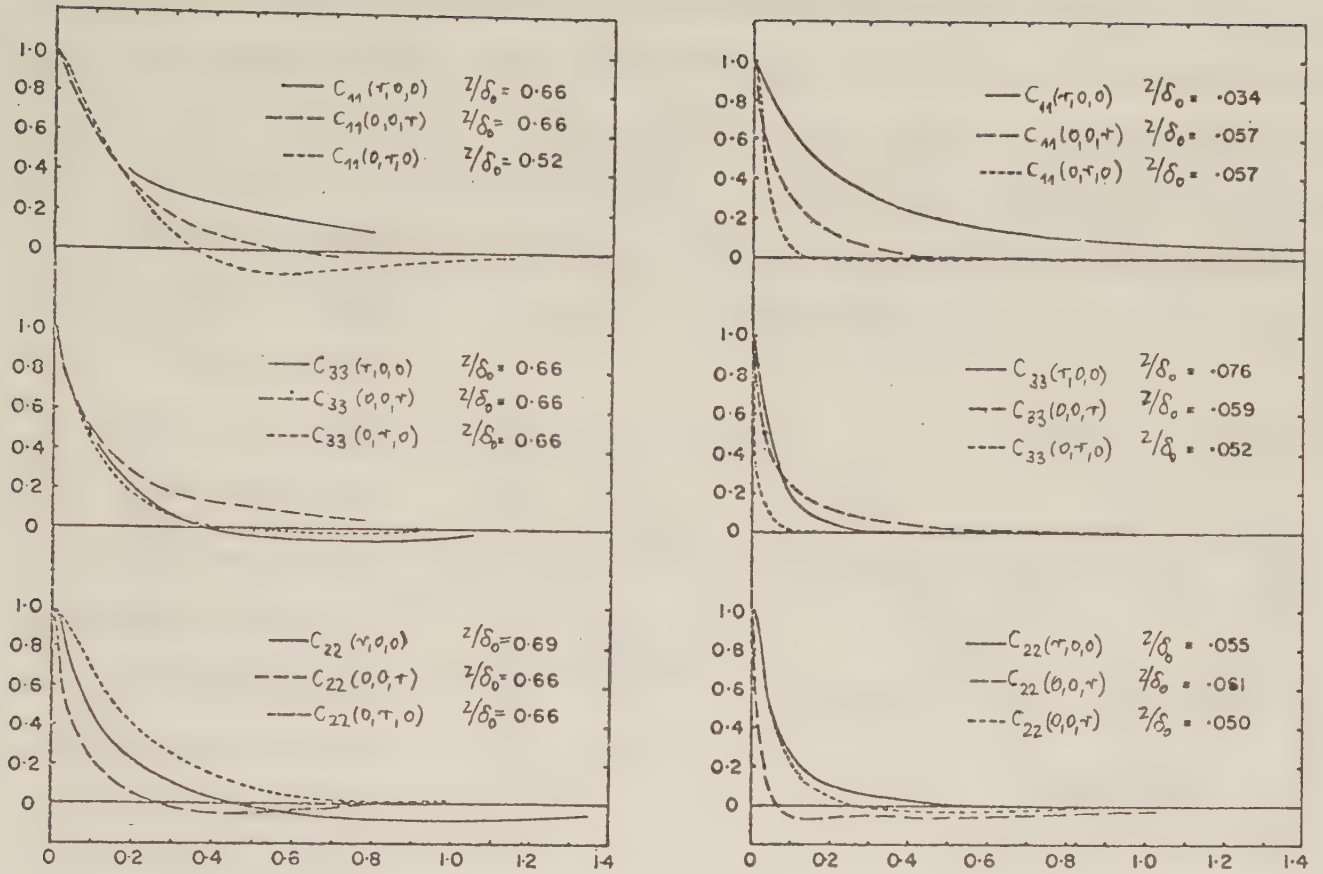


Abb. 4.3

Korrelationsfunktionen in der
äußeren Schicht einer
Scherströmung gegen r/z

Korrelationsfunktionen
einer Scherströmung in
Wandnähe gegen r/z

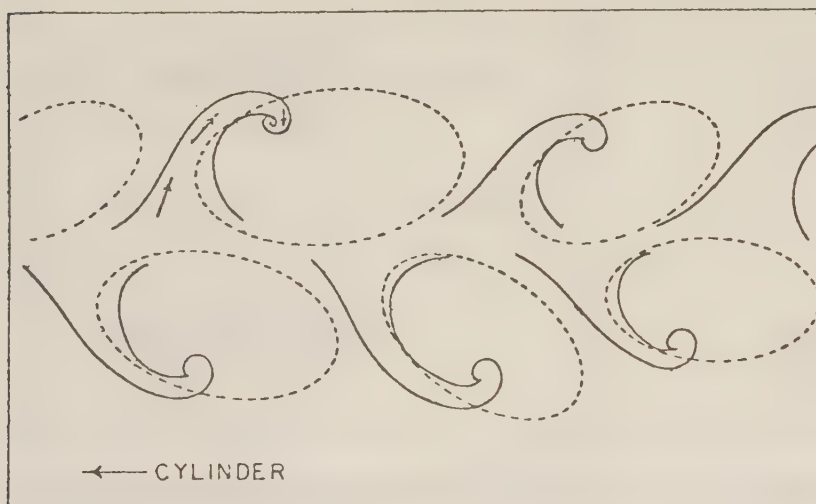
(beide Abbildungen nach GRANT (1958))

In der äußeren Schicht ist ein weiter Bereich von Wirbelgrößen
beteiligt. Der Rückfluß - etwa von u_2' und u_3' in x_1 -Richtung -



deutet an, daß das TOWNSENDSche Wirbelmodell mit sehr großer Er-
streckung der Wirbel in x_1 -Richtung nicht ganz zutrifft. Vielmehr
legt der Verlauf der Korrelationskurven - $C_{33}(r_3)$ und $C_{11}(r_3)$

sind stets positiv, $C_{33}(r_1)$ wird deutlich negativ - nahe, daß man es mit einer Art Mischungsstrahl (mixing jet) zu tun hat, der durch Instabilitäten an der Grenze zwischen Strömungen verschiedener Schubspannung entsteht (etwa bei der Zylinder-nachlaufströmung). In der inneren Schicht ist kein Hinweis auf TOWNSENDS Wandwirbel zu finden. $C_{11}(r_1)$ geht nicht auf Null, sodaß es keine vorherrschenden Wirbelgrößen gibt; ferner wird



$C_{33}(r_3)$ sehr rasch Null.

Man kann eine ähnliche impuls-transportierende Bewegung annehmen wie in der äußeren Schicht, mit kleinerer Bewegungsskala, die aber größer als die der energie-enthaltenden Wirbel

Abb. 4.5

Skizze eines Strahlstroms in einem späten Entwicklungsstadium (GRANT (1958))

in der Schicht ist. Die Mischungsstrahlströme sind x_3 -abhängig, aber, da sie dicht aufeinander folgen, nahezu unabhängig von x_1 . Der Rückfluß von $C_{22}(r_2)$ bzw. fördert eine konvektive oder advective Bewegung.

GRANT beschreibt aufgrund seiner Messungen die großskalige Struktur also als eruptionsartige Bewegung, die Impuls transportiert und in Strömungsrichtung stark gestreckt oder dicht aufgereiht ist.

1967 erscheint eine Arbeit von TRITTON, in der ergänzende

Messungen zu denen von GRANT unter möglichst gleichen Versuchsbedingungen vorgestellt werden. TRITTON hat zusätzlich Korrelationen zwischen u'_1 und u'_3 bzw. u'_2 gemessen sowie Korrelationen mit festem Abstand r_3 und variablem r_1 .

Ein mittlerer Wert für $\frac{-R_{13}(\vec{0})}{\sqrt{\overline{u_1'^2} \overline{u_3'^2}}}$ ist 0.46, $-R_{13}$ ist symmetrisch für Verschiebungen in x_1 -Richtung und wird hier nicht Null. (s. Abb. 4.6), es ist asymmetrisch in x_3 -Richtung (Abb. 4.7).

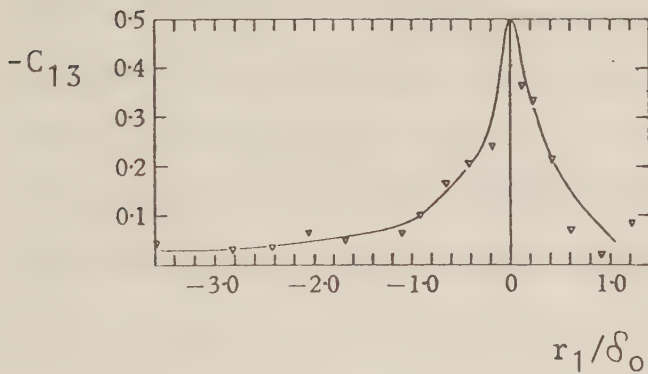


Abb. 4.6

Korrelationsfunktion

$$-R_{13} \left(\frac{r_1}{\delta_0} \right) / \sqrt{\overline{u_1'^2} \overline{u_3'^2}}$$

an der Stelle $\frac{z}{\delta_0} = 0.465$

(nach TRITTON (1967))

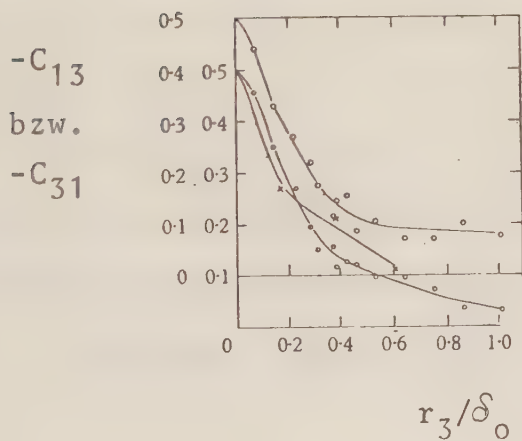


Abb. 4.7

Korrelationsfunktionen

zwischen u'_1 und u'_3 für vertikale Verschiebungen.

Linke Ordinate und oberste Kurve:

$$-R_{13} \left(\frac{r_3}{\delta_0} \right) / \sqrt{\overline{u_1'^2} \overline{u_3'^2}} \text{ an der}$$

Stelle $\frac{z}{\delta_0} = 0.29$,

$$-R_{31} \left(\frac{r_3}{\delta_0} \right) / \sqrt{\overline{u_1'^2} \overline{u_3'^2}} \text{ an der Stelle}$$

$\frac{z}{\delta_0} = 0.29$ ($\circ$), an der Stelle $\frac{z}{\delta_0} = 0.685$ ($\times$).

(nach TRITTON (1967))

Für r_2 wird $-C_{13}$ sehr rasch und deutlich negativ (Abb. 4.8), was eine klare Struktur und Orientierung großer Wirbel verlangt.

TRITTON versucht, aus der Asymmetrie in Strömungsrichtung Aussagen über die Orientierung der großen Wirbel zu erhalten. Bei festem Abstand r_2 und r_3 und einer variablen Verschiebung r_1 weist etwa C_{11} ein Maximum bei $r_1 > 0$ auf (Abb. 4.9), $-C_{13}$ ist bei $r_1 < 0$ maximal, lediglich C_{33} ($r_1, 0, r_3 = \text{const}$) hat sein Maximum an der Stelle $r_1 = 0$, ist aber asymmetrisch.

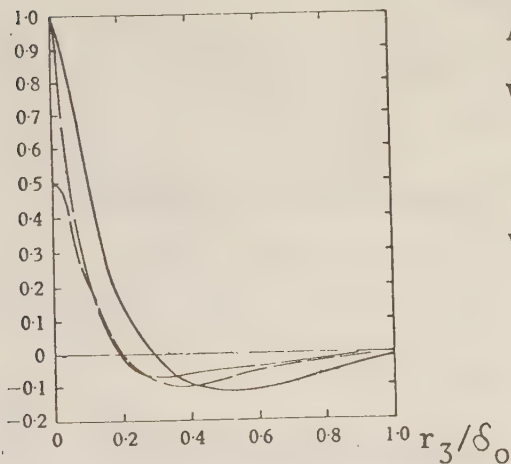


Abb. 4.8

Vergleich von C_{11} , C_{33} und $-C_{13}$

(Normierung s. Abb. 4.6 und 4.7) für vertikale Verschiebungen

$$C_{11}\left(\frac{r_3}{\delta_0}\right), \frac{z}{\delta_0} = 0.305, \quad C_{33}\left(\frac{r_3}{\delta_0}\right), \frac{z}{\delta_0} = 0.29$$

$$C_{13}\left(\frac{r_3}{\delta_0}\right), \frac{z}{\delta_0} = 0.29 \text{ (nach TRITTON (1967))}.$$

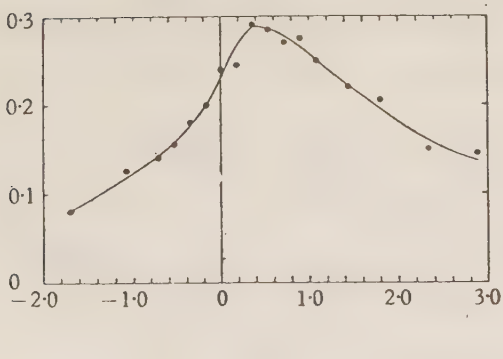


Abb. 4.9

$C_{11}\left(\frac{r_1}{\delta_0}\right)$ mit festem Abstand

$$\frac{r_2}{\delta_0} = 0.055, \quad \frac{r_3}{\delta_0} = 0.295 \text{ an der Stelle}$$

$$\frac{z}{\delta_0} = 0.159 \text{ (nach TRITTON (1967))}$$

TRITTON neigt eher zu einem Modell mit deutlich ausgeprägten großen Wirbeln und verwirft die Vorstellung von eruptionsartigen Bewegungen und Rückströmungen zur Wand, wie GRANT es vorschlägt.

Es gibt eine ganze Reihe von Arbeiten, die die Vorstellung von Ausbrüchen von "Paketen" (bursts) niedrigen Impulses von der Wand weg und Rückfluß von impulsreicher Bewegung vertreten und sogar die Lebensgeschichte eines solchen "burst" darstellen (s. etwa KOVAZNAY, KIBENS u. BLACKWELDER (1970), RAO, NARASIMHA u. NARAYANAN (1971), OFFEN u. KLINE (1975)).

BREMHORST u. WALKER (1973) leiten ihre Aussagen über die impuls-transportierenden Wirbel aus spektralen Messungen her. Das u' -Energiespektrum weist bei mittleren Wandabständen zwei voneinander getrennte Maxima auf, deren Periodendauern etwa im Verhältnis 1:5 stehen (Abb. 4.10). Im w' -Spektrum ist das nicht zu beobachten. Das Cospektrum von u' und w' wird bei geringen Wandabständen für niedrige Frequenzen negativ; das bedeutet -so die Autoren- einen Rückfluß von niedrigem Impuls nach unten.

Aus den Beobachtungen resultiert die folgende Modellvorstellung: unkorrelierte Fluktuation sind überlagert von quasi-organisierten Störungen (Abb. 4.11). Diese entstehen in unmittelbarer Wandnähe mit einer Zeitskala T_1 , die dem langwelligen Maximum des u' -Spektrums entspricht. Bei dieser Frequenz wird in Wandnähe das Cospektrum Co_{13} positiv ($-Co_{13} < 0$): bei der Ablösung der Störung wird zu geringer Impuls abwärts transportiert.

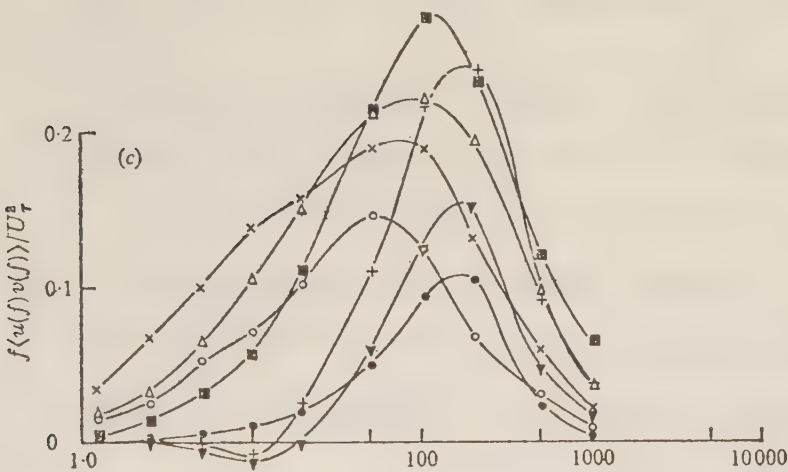
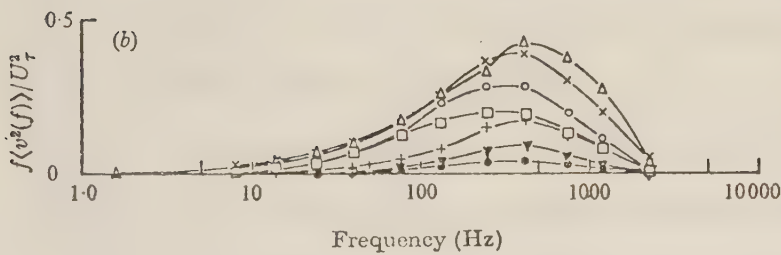
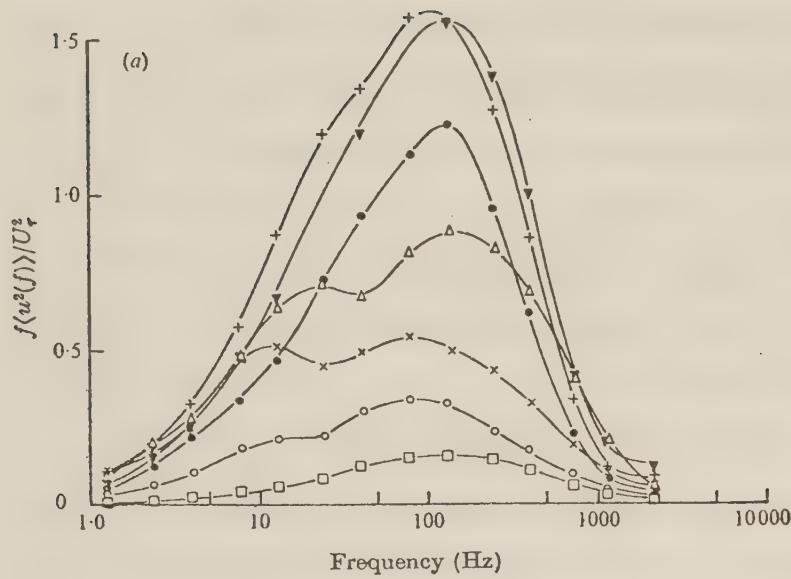


Abb. 4.10

Energiespektren von u' (oben) und w' (Mitte), negatives Cospektrum von $u'w'$ (unten), alle Spektren mit u_*^2 normiert, in einer Rohrströmung mit $Re = 26\,780$ für Wandabstände $z^+ = \frac{zu_*}{\nu}$

- 6.46
- ▼ 8.6
- + 12.9
- 21.5
- △ 64.6
- × 215
- 640
- 1131

(BREMHORST u. WALKER (1973))

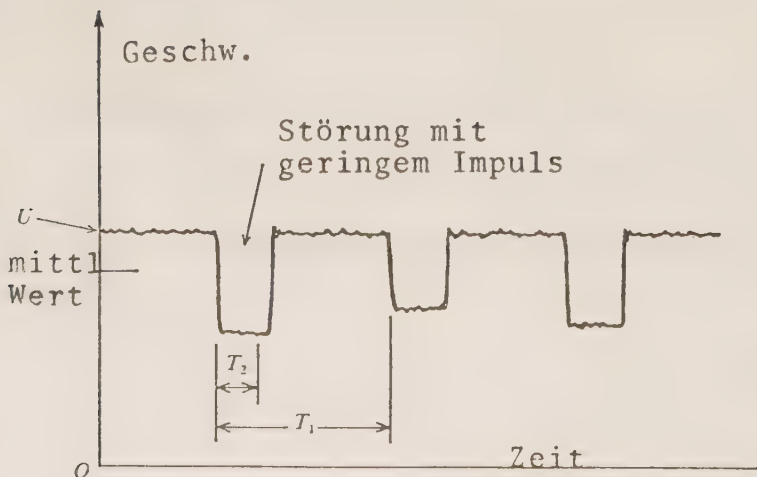


Abb. 4.11

Vereinfachte Zeitgeschichte der turbulenten Strömung in einem wandnahen Punkt.

(BREMHORST u. WALKER (1973)).

43. Übertragbarkeit der Modelle auf die Prandtl-Schicht

Auch in der bodennahen Grenzschicht der Atmosphäre wurden Korrelationsmessungen durchgeführt und weit mehr spektrale Analysen der Geschwindigkeitskomponenten. Diese Arbeiten haben jedoch fast nie ausdrücklich das Ziel, die Gestalt oder Orientierung großer vorherrschender Wirbel zu beschreiben. Meist wird größerer Wert auf Fragestellungen wie etwa Schichtungsabhängigkeit der Spektren oder Korrelationsfunktionen (und damit auch der Längenskalen), Unterschiede in den Transportmechanismen für Impuls und Wärme u.ä. gelegt. Daher sollen hier die Ergebnisse von Strukturuntersuchungen in der atmosphärischen Grenzschicht nicht dargestellt werden sondern erst im 5. Kapitel jeweils in Verbindung mit den eigenen Meßergebnissen.

Es bleibt also die Frage, wie weit die 41. und 42. entwickelten Modelle auf die Turbulenz der Prandtl-Schicht anwendbar sind.

Die theoretischen Modelle, die in einem zerfallenden Turbulenzfeld bei kleinen Wellenzahlen zeitlich unveränderliche große Wirbel postulieren, sind aus folgenden Gründen kaum auf die Atmosphäre zu übertragen: Das zu betrachtende Spektrum der Mikroturbulenz reicht nicht bis $k=0$; aus meßtechnischen und theoretischen Überlegungen wählt man eine Meßdauer (=Mittelungszeit) von etwa 20-60 min, in diesem Bereich erwartet man ein spektrales Energieminimum (spectral gap), das das Spektrum der Mikroturbulenz von dem der Makroturbulenz trennt. Wegen der begrenzten Meßdauer kann man die langen Wellen nicht richtig erfassen, sodaß ihr Energieanteil im Spektrum der Mikroturbulenz auftaucht. Dies und die Tatsache, daß das spektrale Energiemaximum oft nur schwach ausgeprägt ist, bewirken, daß der lang-

wellige Teil des Turbulenzspektrums nicht nur von den großen Wirbeln in der Grenzschicht bestimmt wird sondern auch von makro- und mesoskaligen Phänomenen.

Andererseits erscheint die Übertragung von Hypothesen, die für zerfallene Turbulenz hergeleitet werden, auf eine Strömung, in der ständig anisotrop neue Turbulenz erzeugt wird, problematisch.

Die Methode, aus Korrelations- oder Spektralgleichungen zu Aussagen über den Verlauf etwa des Energiespektrums bei kleinen Wellenzahlen zukommen, ist wegen der Komplexität der Gleichungen für inhomogene Turbulenz (2.21) und (2.39) kaum brauchbar.

Wesentlich erfolgversprechender dürfte die Anwendung der zweiten Methode sein, aus gemessenen Korrelationsfunktionen und Spektren Modelle für die großskaligen Strukturen der Turbulenz zu erhalten. Man kann für die atmosphärische Grenzschicht erwarten, aus dem Verlauf der Kurven wirbelähnliche Gebilde oder erup-tionsartige Vorgänge zu erkennen. Bei der Interpretation muß auf die Unterschiede der turbulenten Strömungen in Laborversuchen und in der Prandtl-Schicht geachtet werden (Re-Zahl, Strömungsgeometrie, Inhomogenität).

Dies soll im 6.Kapitel durchgeführt werden.

5. Experimentelle Untersuchungen

Die Meßdaten, die in dieser Arbeit ausgewertet wurden, wurden bei dem Experiment GREIV I (Grenzschicht Instrumentelle Vermessung) bei Meppen/Ems gewonnen. Das Experiment fand unter Beteiligung von 17 Gruppen aus der Bundesrepublik sowie Italien vom 16.4. bis 29.4.1974 statt; die Ziele waren, einen möglichst vollständigen Satz von Daten (Turbulenzparameter, Profile, Flüsse) in der Prandtl-Schicht zu gewinnen, die Parameter in der Ekman-Schicht zu erfassen sowie die Durchführung von Vergleichsmessungen (s.ROTH (1977)). Die hier verwendeten Daten wurden von der damaligen Arbeitsgruppe Mikrometeorologie (Dipl.Phys.C. FREYTAG, K.HÄCKL und H.SCHWEIGER) sowie Prof.Dr.F.FIEDLER aus Mainz ("schnelle Temperatur") gewonnen.

5.1. Meßplatz

Das Experiment GREIV I fand auf dem Gelände der Erprobungsstelle 91 der Bundeswehr (s.BEYER u.ROTH (1976), S.4 ff) statt. Zur Zeit der Messungen war es mit etwa 20 cm hohem Raps bzw. Wintergerste bewachsen.

Die Münchner Meßmasten (s.Pfeile bei Abb.5.1) waren so aufgestellt, daß westliche Winde, wie sie im Emsland vorherrschen, über ein relativ ebenes homogenes Gelände wehen; es gab jedoch viele Ostlagen, für die das Meßfeld durch den Wagenpark sowie durch ein etwa 200 m entferntes Waldstück gestört war und die Turbulenzmessungen zumindest in den oberen Höhen beeinträchtigt waren.



Abb. 5.1

Meßplatz von GREIV I bei Rupennest (Ausschnitt aus Sögel, Karte des Militärgeographischen Amtes, Ausgabe 1-DMG, Serie M 745, L3110)

52. Hintergrundmessungen

Zur Erfassung der äußeren Parameter die die turbulente Strömung kennzeichnen, zur Erfassung des Wärmehaushalts sowie zur An-

eichung der Wind- und Temperaturfluktationen wurden sogenannte "langsame" Messungen durchgeführt. An zwei Masten wurden in jeweils 6 Höhen (0.5, 1, 2, 4, 8 und 16 m) die horizontale Windgeschwindigkeit mit CASELLA-Anemometern des Typs T 16108/2 und die Trocken- und Feuchttemperatur mit Pt-100 Thermometern gemessen. Ferner wurden an einem Bodenmeßstab, der mit 5 Pt-100 Thermometern bestückt war, die Bodentemperatur in 2, 5, 10, 20 und 50 cm Tiefe gemessen. Mit einem Strahlungsbilanzmesser nach Schulze wurde in 2 m Höhe die Gesamtstrahlungsbilanz gemessen (s. Abb. 5.3, S. 67). Die Meßfühler wurden je nach der Meßfrequenz der Fluktuationsgrößen jede Minute oder alle 10 min abgefragt. Die Temperaturen sind Momentanwerte, die Windgeschwindigkeiten 1- bzw. 10-min Mittel. Ein Meßrun dauerte 30 min; auf einem Magnetband wurden jeweils 77 min bzw. 12 h aufgezeichnet.

53. Auswertung der Hintergrundmessungen zur Beschreibung der turbulenten Strömung

Bei der Interpretation turbulenter Strömungen ist die Kenntnis der sie beschreibenden äußeren Parameter wesentlich. Für die atmosphärische Grenzschicht sind dies die Reynolds-Zahl bzw. die Windgeschwindigkeit in einer festen Höhe (i.a. 10 m), die Rauigkeitslänge z_0 sowie ein Parameter, der die Schichtung kennzeichnet.

Ferner kann man aus den Profilen mittels der weitgehend bekannten Profil-Gradient-Beziehungen (s. DYER (1974), YAMAMOTO (1975)) Turbulenzparameter wie u_* und θ_* bestimmen.

Bei der Auswertung wird folgendermaßen vorgegangen:

Für alle Meßruns wird

$$Ri(z) = \frac{g}{\theta} \frac{\frac{\Delta \bar{\theta}}{\Delta z}}{(\frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z})^2} \quad (5.1)$$

die Gradient-Richardson-Zahl bestimmt; als Mittelwert wird das arithmetische Mittel $\bar{Ri}$ über die Ri-Zahlen für die Höhen $\tilde{z}_i = \sqrt{z_i z_{i+1}}$ ($i=1,2,\dots,5$) gewählt. Für Runs mit $\bar{Ri} \leq 0.3$ wird dann aus dem adiabatischen Windprofil

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{K} \ln \frac{z}{z_0} \quad (5.2)$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate u_* und z_0 bestimmt. Trägt man z_0 gegen $\bar{Ri}$ auf, so erhält man für neutrale bis schwach labile Schichtung $z_0 = 1.5$ cm. Dieser Wert rechtfertigt im Nachhinein die Verwendung von (5.2) gegenüber der Windprofilgleichung

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{K} \ln(1 + \frac{z}{z_0}), \quad (5.2a)$$

die für Höhen $z < 50z_0$ verwendet werden muß (vgl. HENNEMUTH (1974)).

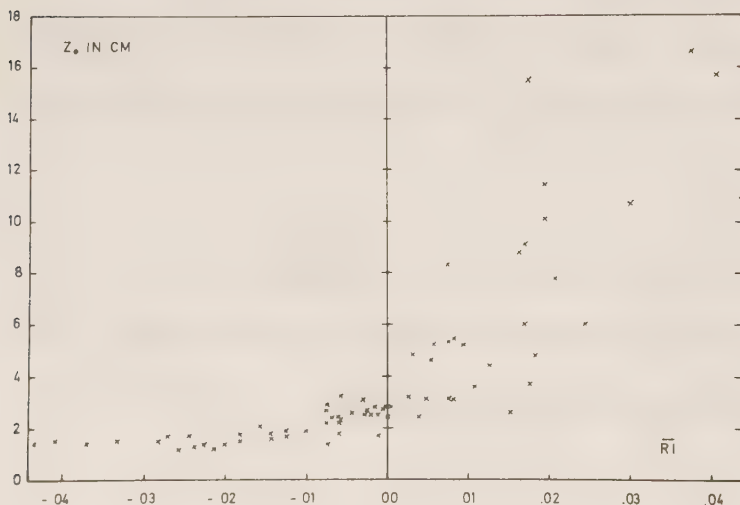


Abb. 5.2

z_0 aus (5.2) in Abhängigkeit vom Stabilitätsparameter $\bar{Ri}$

Mit dem so ermittelten z_0 werden dann nach einem Vorschlag von PANOFSKY (1963) für labile bis schwach stabile Schichtungen ($|\overline{Ri}| \leq 0.05$) u_* und $\Psi(\frac{z}{L_*})$ (L_* Stabilitätslänge) bestimmt aus

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} - \int_{-\frac{z_0}{L_*}}^{-\frac{z}{L_*}} \frac{1 - \Phi_M(\xi)}{\xi} d\xi \right) = \frac{u_*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} - \Psi\left(\frac{z}{L_*}\right) \right) \quad (5.3)$$

mit

$$\Phi_M\left(\frac{z}{L_*}\right) = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} . \quad (5.4)$$

Mit Hilfe der KEYPS-Formel

$$\Phi_M^4 - 18 \frac{z}{L_*} \Phi_M^3 = 1 \quad (5.5)$$

und der Annahme

$$Ri = R_f = \frac{1}{\Phi_M} \frac{z}{L_*} \quad (5.6)$$

erhält man für $Ri \leq 0.05$ $\frac{z}{L_*}$ und damit L_* . $\Psi(\frac{z}{L_*})$ bestimmt sich aus $\frac{z}{L_*}$ nach Gleichungen von WEBB (s. PANOFSKY (1963)):

$$\text{für } -\frac{z}{L_*} < 0.0317 \quad \text{ist} \quad \Psi\left(\frac{z}{L_*}\right) = -4.5 \frac{z}{L_*} \quad (5.7a)$$

und

$$\begin{aligned} \text{für } -\frac{z}{L_*} \geq 0.0317 \quad \text{ist} \quad \Psi\left(\frac{z}{L_*}\right) &= \ln \frac{1.98z}{-L_*} - 0.948 \left(\frac{z}{L_*}\right)^{-\frac{4}{3}} \\ &\quad - 0.00107 \left(\frac{z}{L_*}\right)^{-\frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (5.7b)$$

und dann erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate u_* aus (5.3).

Für stabile Schichtung wendet man die Formel

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \frac{\beta z}{L_*} \right) \quad (5.8)$$

an, man bestimmt u_* und $\frac{\beta}{L_*}$ und erhält L_* mit $\beta=4.7$.

So erhält man aus den Profilmessungen für jeden Run die Längenskalen z_0 und L_* sowie einen Näherungswert für u_* .

54. Fluktuationsmessungen

An einem schwenkbaren Mast wurden in 3 Höhen (0.8, 2.2 und 7.0 m) die Fluktuationen von Wind und Temperatur gemessen. Die Ausleger (Länge 2 m) wurden vor jedem Meßrun in die mittlere Windrichtung gedreht. Die Meßfühler waren auf eine schnell reagierende Windfahne nach C.FREYTAG montiert, die Stellung der Windfahne wurde zu jedem Meßzeitpunkt mitregistriert.

Zur Windmessung wurden Dreifach-Hitzdrahtmeßfühler der Firma DISA, Herlev (Dänemark), Typ 55 P91 verwendet. Je drei platinbeschichtete Wolframdrähte von 5 μ m Durchmesser und einer empfindlichen Länge von 1.25 mm, die auf eine konstante Temperatur von 580K überhitzt sind, sind zu einem rechtwinkligen Dreieck angeordnet. Aus den Meßsignalen der drei Drähte erhält man die drei Windkomponenten relativ zur beweglichen Windfahne, zusammen mit den Windfahnenwinkeln und der Auslegerichtung die drei Windkomponenten in einem eingenordeten Koordinatensystem. Die Eichung erfolgte im Windkanal; die während der Messungen ermittelten Windgeschwindigkeiten wurden in das Windprofil eingepaßt.

Die Temperaturfluktuationen wurden mit Platindrähten von 1 μ m Durchmesser gemessen, die über 1 cm^2 aufgespannt waren (Meßfühler und Elektronik nach FIEDLER). Eine genaue Beschreibung der "schnellen" Meßsysteme findet man in der Arbeit von FREYTAG(1977).

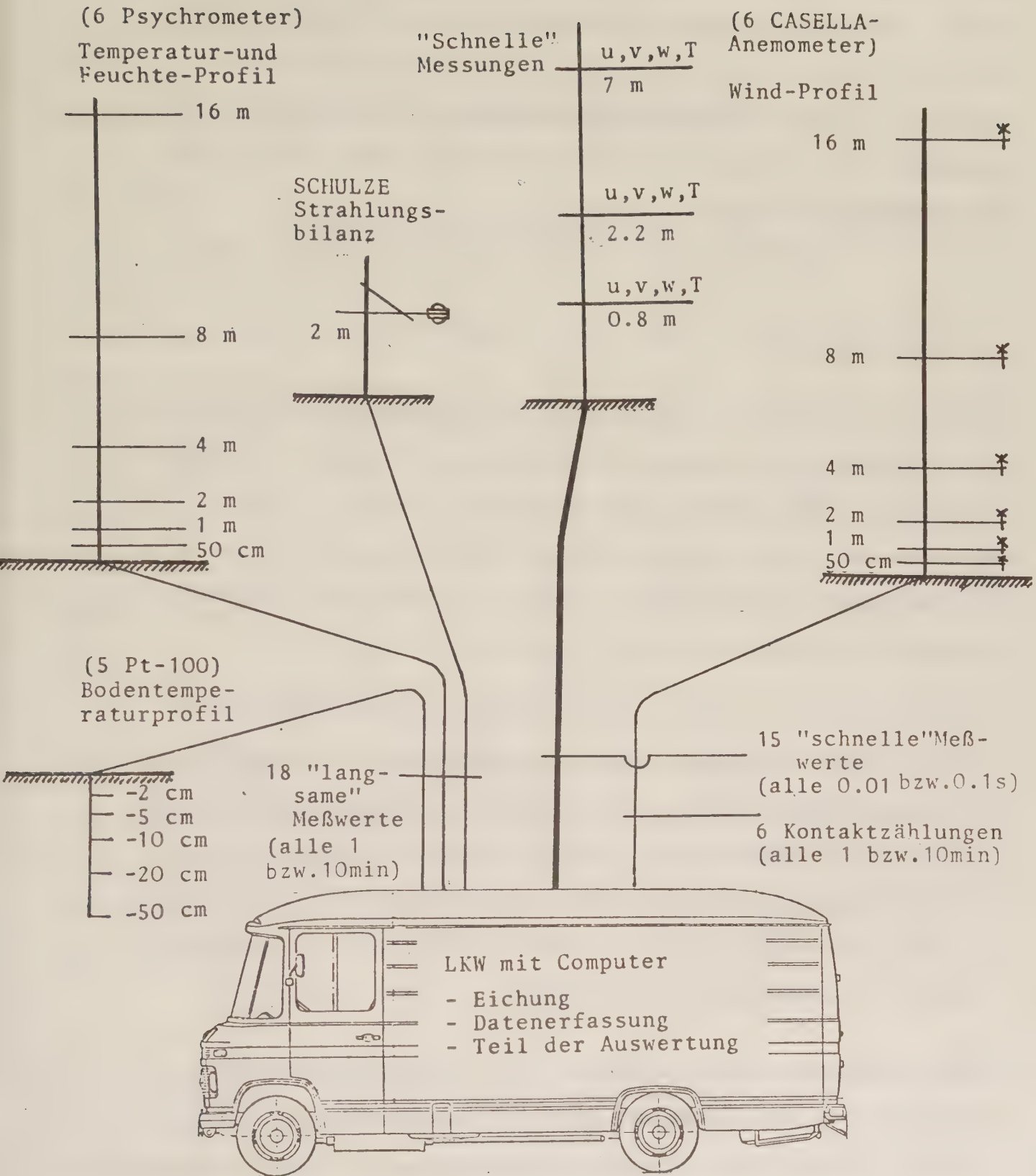


Abb. 5.3

Schematische Darstellung der Datenerfassung bei GREIV I
(nach FREYTAG (1977)).

Die Fluktuationsgrößen (3x3 Windkomponenten, 3 Windfahnenwinkel und 3 Temperaturwerte) wurden alle 0.01 s - bei einigen Runs nur alle 0.1 s - von einem Rechner (HP 2116) über ein Datenerfassungssystem (HP 2312A) abgefragt, digitalisiert und zusammen mit den langsamen Messungen (alle 1 bzw. 10 min) auf Magnetband gespeichert.

6. Meßergebnisse

Bei der Auswertung der Fluktuationsmessungen wurden ausschließlich Winddaten von Meßruns verwendet, die man noch als schwach stabil bis schwach labil bezeichnen kann ($-0.08 \leq \frac{z}{L_*} \leq 0.03$). Wünschenswert wären adiabatische Verhältnisse gewesen, sodaß die Turbulenz rein dynamisch erzeugt wird und keine Wechselwirkungen zwischen Wind- und Temperaturfeld bestehen.

In den Kapiteln 3. und 4. wird deutlich, welche Größen oder Funktionen Informationen über die großskaligen Prozesse liefern. Im wesentlichen handelt es sich dabei um Korrelationsfunktionen zwischen Windkomponenten u'_i und u'_j mit einer Ortsverschiebung in x_k -Richtung $R_{ij}(r_k)$, $i, j, k=1, 2, 3$ oder zwischen Windkomponenten u'_i und u'_j mit einem festen Abstand Δx_1 (Abstand der Meßfühler) und einer variablen Ortsverschiebung r_k ($k \neq 1$) $R_{ij}(r_k, \Delta x_1)$.

Aber auch andere Beziehungen wie etwa Häufigkeitsverteilungen oder Spektren geben Auskunft über die vorherrschenden großen Wirbel. Nur aus einer Zusammenstellung möglichst vieler statistischer Funktionen über das Turbulenzfeld in Bodennähe kann man ein Bild von den Strukturen gewinnen.

In den folgenden Abschnitten sollen die Ergebnisse dargestellt werden und mit Ergebnissen anderer Autoren verglichen werden.

Tabelle 6.1 zeigt die dabei verwendeten Meßruns.

	Datum	Beginn MEZ	$\bar{u}(2.0m)$ in m/s	$u_*(0.8m)$ in cm/s	L_* in m	Zeichen
1101	25.4.74	21.00	4.23	-	254	□
1102	25.4.74	21.30	4.43	-	222	x
1701	26.4.74	7.00	3.84	33.4	-326	+
1702	26.4.74	7.30	4.71	33.0	-173	*
1801	26.4.74	9.00	5.35	31.9	- 90	T
1802	26.4.74	9.30	5.23	31.7	- 86	V
2101	27.4.74	7.00	3.45	26.0	-136	1
2102	27.4.74	7.30	4.02	31.5	-162	U
2301	28.4.74	11.00	6.77	-	-238	3

Alle Runs dauerten 30 min und hatten einen Zeitschritt für die Fluktuationsmessungen von 0.01s. Im folgenden werden vielfach die Windkomponenten in 0.8m Höhe mit u_1 , v_1 und w_1 , in 2.2 m Höhe mit u_2 , v_2 und w_2 und in 7.0 m Höhe mit u_3 , v_3 und w_3 bezeichnet.

61. Zeitreihen

Einen ersten Eindruck von den Prozessen in der turbulenten Grenzschicht erhält man, wenn man Zeitreihen von Turbulenzgrößen betrachtet.

In Abb. 6.1 ist ein typisches Beispiel für den Verlauf von u' , w' , $u'w'$ und $(u'w')^2$ ausgewählt.

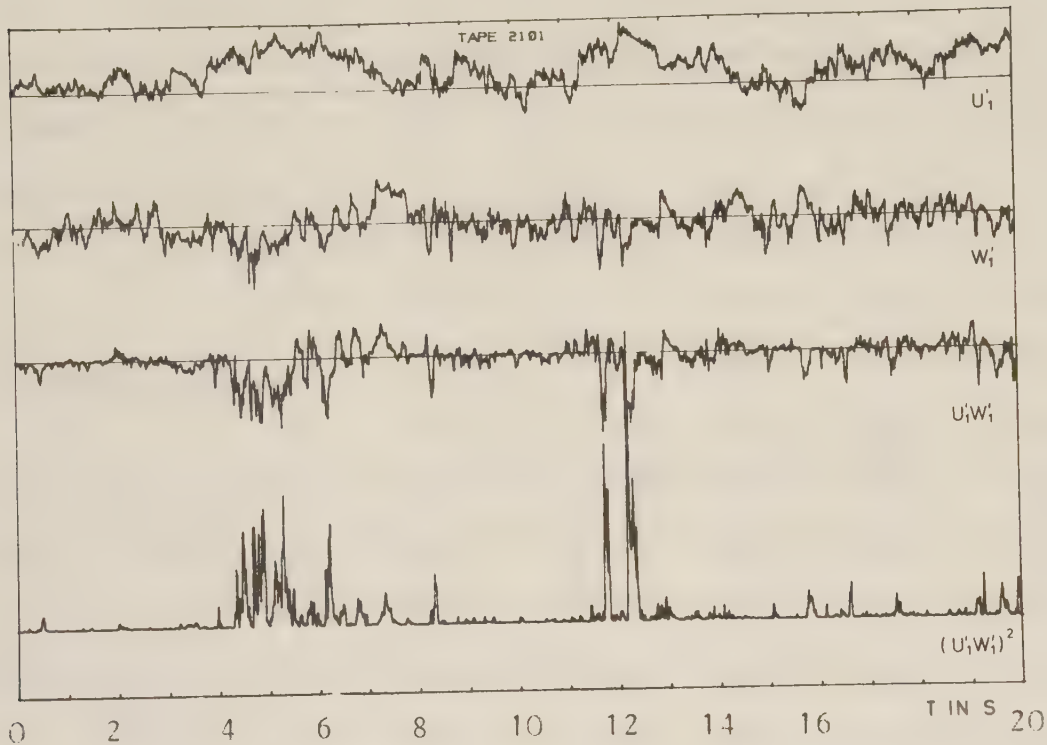


Abb. 6.1

Zeitlicher Verlauf von u' , w' , $u'w'$ und $(u'w')^2$ in 0.8m Höhe während 20 s (aus Run 2101) (durchgezogene Linie=Runmittelwert)

Aus den Zeitreihen kann man folgende Merkmale erkennen:

Die Schwankungen von u' erfolgen mit einer größeren Periodendauer als die von w' , welches rasche Schwankungen um die Nulllage ausführt. Die Struktur von $u'w'$ wird stärker von w' als von u' bestimmt, wobei große Amplituden von $u'w'$ vornehmlich durch $w' < 0$ und $u' > 0$ (Abwärtstransport von Impuls) bewirkt werden. $u'w'$ schwankt offenbar um die Nulllinie, obwohl der Mittelwert < 0 ist.

Um zu sehen, ob solche Ereignisse, bei denen $u'w'$ plötzlich hohe

negative Werte annimmt, simultan in allen Höhen vorkommen, betrachtet man die Zeitreihen von $u'w'$ und $(u'w')^2$, was große Amplituden deutlicher erkennen läßt, in den verschiedenen Meßhöhen. Einige markante Ereignisse kann man in allen drei

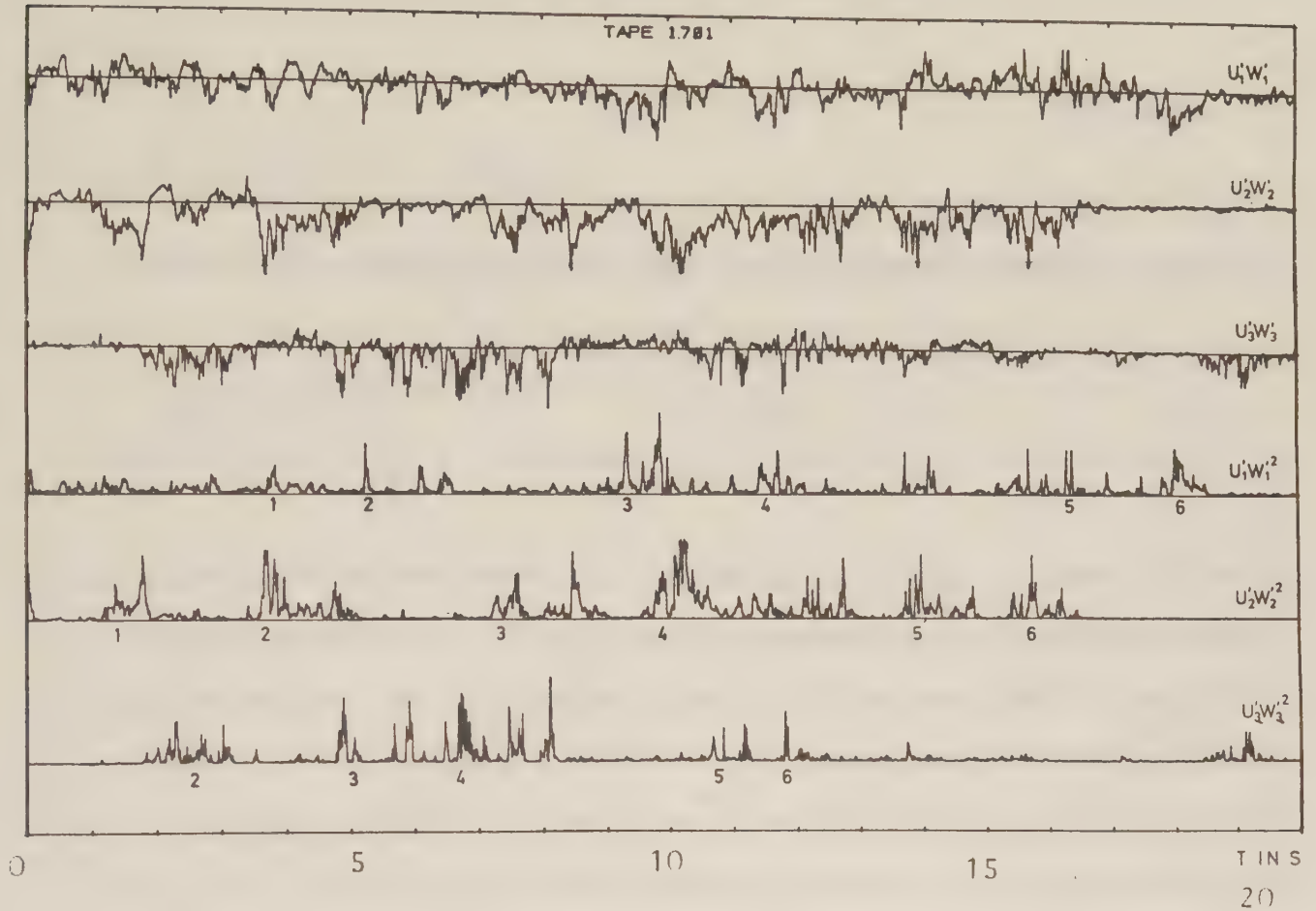


Abb. 6.2a (oben)

Zeitreihen von $u'w'$ und $(u'w')^2$ in 0.8, 2.2 und 7.0 m Höhe während 20 s (Run (Run 1701))

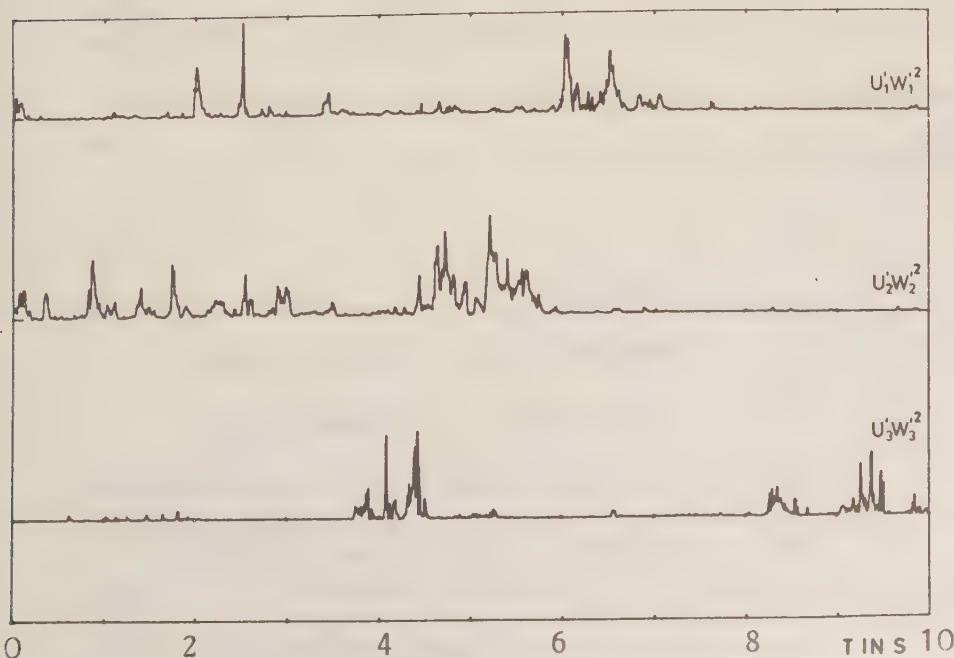


Abb. 6.2b (unten)

Zeitreihen von $(u'w')^2$ in 0.8, 2.2 und 7.0 m Höhe während 10 s (Run 1701)

Richtungen erkennen, sie treten zuerst in 7.0 m Höhe, etwas später in 2.2 und 0.8 m Höhe auf.

62. Momente, Häufigkeitsverteilungen

621. Momente

Die Fluktuationen u' , v' und w' kann man als nahezu normalverteilt ansehen. Als Mittelwert über 9 Runs (Meßhöhe 0.8m) erhält man

für u' eine Schiefe $S_u = .133$ und eine Kurtosis $K_u = 2.59$,		
für v'	$S_v = .094$ und	$K_v = 3.02$ und
für w'	$S_w = -.278$ und	$K_w = 4.24$

(Definition von S und K s.Anhang). Die Normalverteilung hat eine Schiefe von 0 und eine Kurtosis von 3. Auch in anderen Arbeiten findet man leichte Abweichungen von der Gaußverteilung für die Windfluktuationen (vgl. DUTTON u.DEAVEN (1972), S.360). PRIES (1970) gibt die Schiefe von u' und w' in Abhängigkeit von der Stabilität an; die hier ausgewerten Runs fallen in die Stabilitätsklasse C bei PRIES. Der Wert von S_u stimmt gut mit denen von PRIES überein, der von S_w ist mit $-.3$ etwas kleiner. Für die horizontale Windgeschwindigkeit gibt SHIOTANI (1975) eine Schiefe von -0.07 ± 0.17 und eine Kurtosis von 2.85 ± 0.42 an.

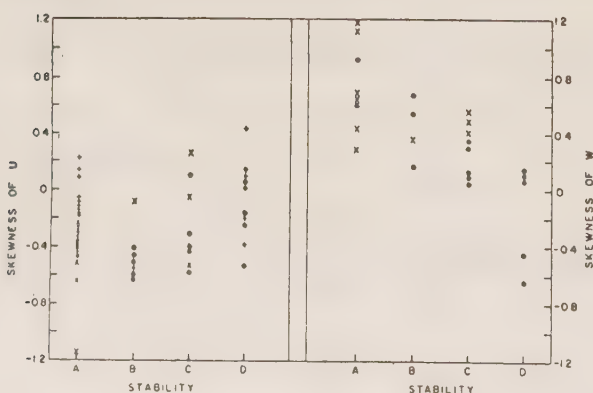


Abb. 6.3

Schiefe von u' (links) und w' (rechts) in Abhängigkeit von der Stabilität (South Dartmouth, 15-16 m) nach PRIES (1970)

Die Schubspannung $u'w'$ ist nicht normalverteilt, für 0.8 m Höhe ergibt sich $S_{uw} = -0.97$ und $K_{uw} = 6.13$. McBEAN (1973) gibt $S_{uw} = -1.5$ und $K_{uw} = 8.7$ an. Die Verteilung von $u'w'$ ist also nicht nur schief, sie ist auch spitzer als die Normalverteilung.

622. Häufigkeitsverteilungen

Die in 621. genannten Eigenschaften der Zeitreihen erkennt man natürlich auch in den Häufigkeitsverteilungen. Während u' , v' und w' nahezu normalverteilt sind (s. Abb. 6.4, S.), weist die Verteilung von $u'w'$ gegenüber einer Gaußverteilung folgen-

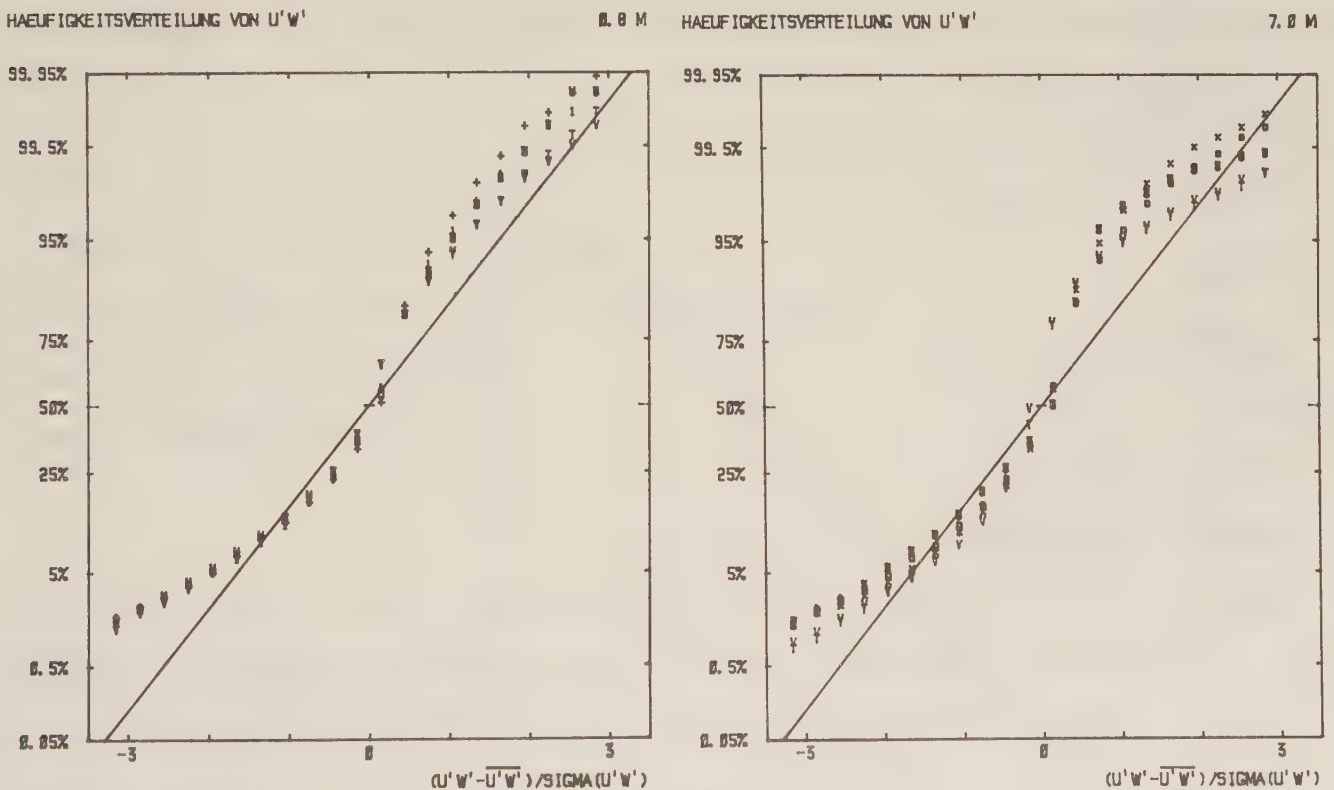


Abb. 6.5

Häufigkeitsverteilung von $(u'w' - \overline{u'w'}) / \sigma_{u'w'}$ für 0.8 m (links) und 7.0 m (rechts), Symbole s. Tabelle 6.1 (die durchgezogene Linie entspricht einer Gaußverteilung).

HÄUFIGKEITSVERTEILUNG VON u'

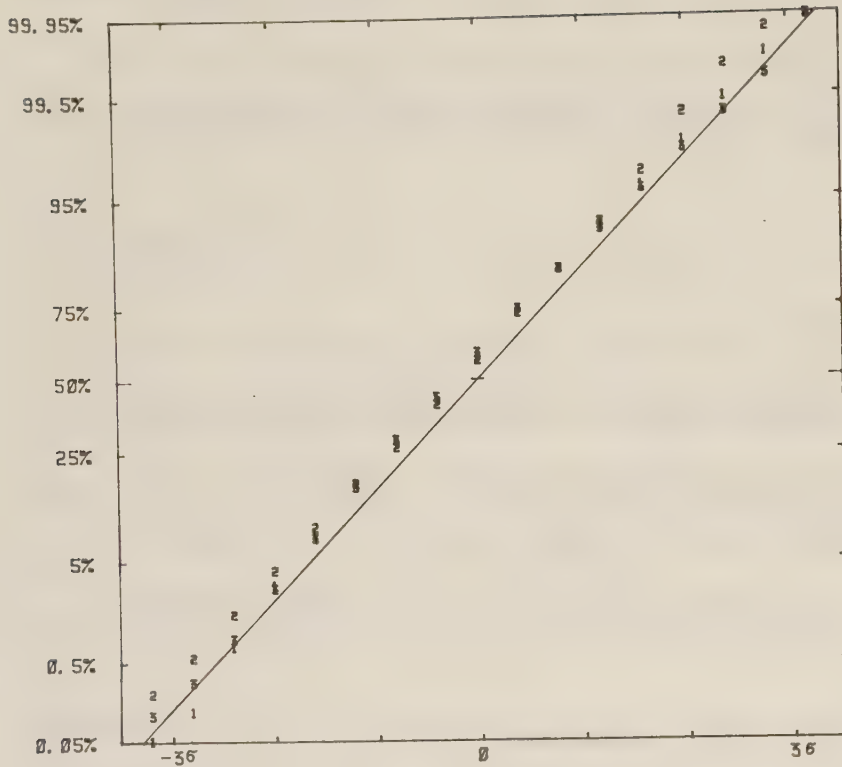


Abb. 6.4

Häufigkeitsverteilung von u' (oben) und w' (unten).

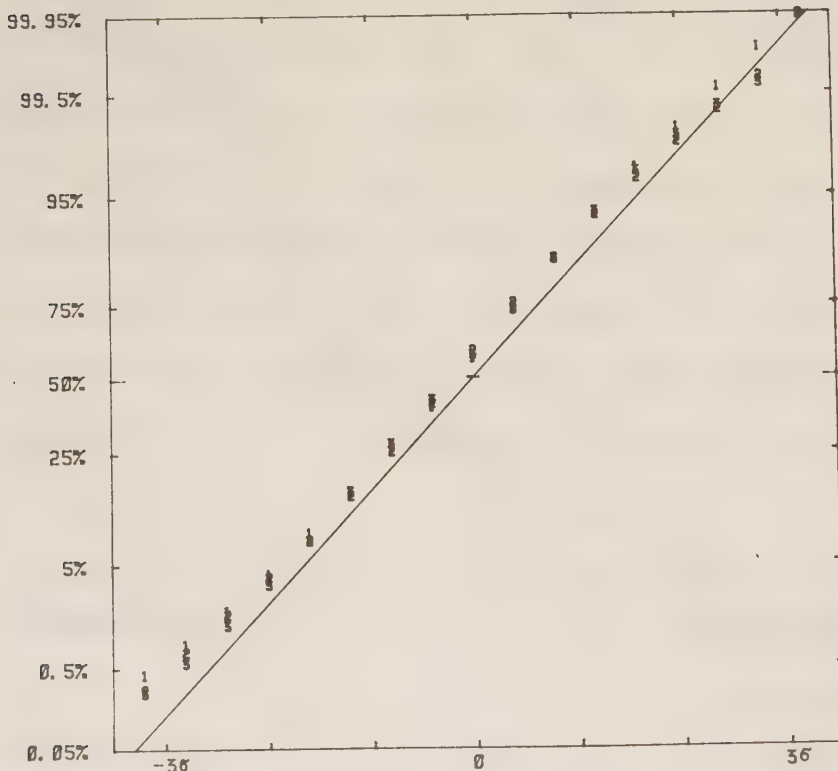
1: 0.8 m (Mittel über 9 Runs)

2: 2.2 m (7 Runs)

3: 7.0 m (9 Runs)

Die durchgezogene Linie entspricht einer Gaußverteilung.

HÄUFIGKEITSVERTEILUNG VON w'



de Besonderheit auf (s. Abb. 6.5): Der Mittelwert und kleine negative Abweichungen vom Mittelwert kommen zu selten vor, große negative Abweichungen zu häufig. Der häufigste Wert ist größer als der Mittelwert, nahe bei Null.

Das zeigt auch die Darstellung von McBEAN (1974) (Abb.6.6) und ist bereits in den Zeitreihen zu erkennen. Ein hoher Pro-

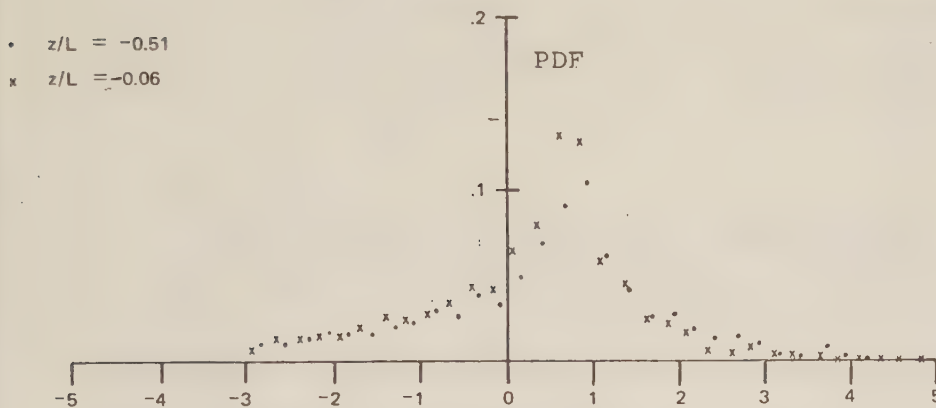


Abb. 6.6

Häufigkeitsdichteverteilung von $-(u'w' - \overline{u'w'})/u_*^2$ für labile (•) und nahezu neutrale (x) Schichtung. nach McBEAN (1974)

zentsatz der Zeitreihe $u'w'$ ist nahezu Null, wenige große Werte erzeugen den Impulsfluß nach unten. Dieses Verhalten kann man als intermittierend bezeichnen.

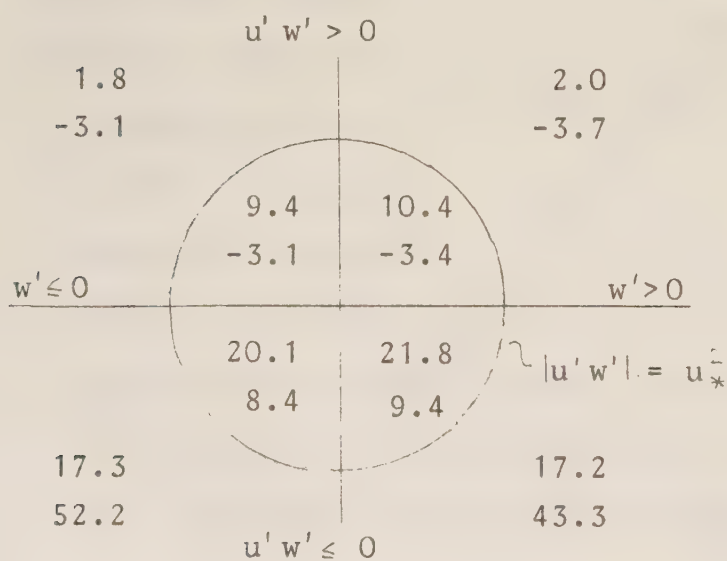
ANTONIA und ATKINSON (1973) nehmen an, daß man den Prozeß $u'w'$ in turbulente und nicht-turbulente Perio-

den unterteilen kann, in denen $u'w'$ jeweils normalverteilt ist; es gibt jedoch keine Hinweise, daß diese Annahme für die großskaligen Strukturen der atmosphärischen Turbulenz zutrifft.

Eine weitere Aussage über die Häufigkeit und Andauer großer und kleiner Schwankungen von $u'w'$ erhält man durch die Einteilung der in Meppen gemessenen Daten in folgende Klassen:

Klasse	$\overline{u'w'} 1s$	$ \overline{u'w'} 1s$	$\overline{w'} 1s$		
1	>0	$>u_*^2$	>0	}	Aufwind
2	>0	$>u_*^2$	≤ 0		Abwind
3	>0	$\leq u_*^2$	>0		
4	>0	$\leq u_*^2$	≤ 0		
5	≤ 0	$>u_*^2$	>0	}	Aufwind
6	≤ 0	$>u_*^2$	≤ 0		Abwind
7	≤ 0	$\leq u_*^2$	>0		
8	≤ 0	$\leq u_*^2$	≤ 0		

Als charakteristische Größen werden hier die Mittelwerte von $u'w'$ über 1s gewählt, als "Burst" wird also nur eine kurze aber große Abweichung von Null oder ein mäßig hoher Wert, der aber mindestens 1s andauert, bezeichnet. Im Mittel über 8 Runs erhält man Prozentzahlen für die Häufigkeit in den 8 Klassen (obere Zahl in der Skizze)



und Prozentzahlen für den Beitrag zum gesamten Reynoldsstress (untere Zahl). $u'w'$ und w' bedeuten hier einen Mittelwert über 1 s.

Ferner kann man die mittlere Andauer von Perioden angeben:

$u'w' > 0$	1.6 s	$u'w' > 0, u'w' > u_*^2$	3.1 s
$u'w' \leq 0$	5.4 s	$u'w' \leq 0, u'w' > u_*^2$	3.5 s

In einer sehr detaillierten Analyse gibt McBEAN (1974) in einem Diagramm an, mit welcher Häufigkeit die Größe $u'w'$ größer als ein bestimmter Wert ist und wie lange die Fluktuationen andauern.

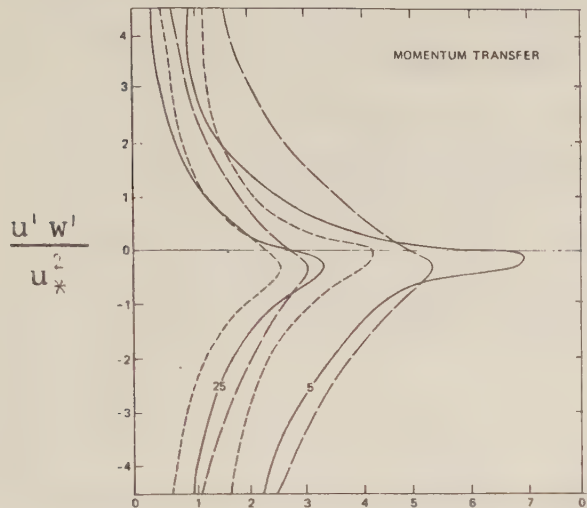


Abb. 6.7

Analyse der Größe der Fluktuationen von $u'w'$ und ihrer Andauer

$$\begin{aligned} \text{---} & \frac{z}{L_*} = -0.49, \quad \text{---} & \frac{z}{L_*} = -0.07, \\ \text{---} & \frac{z}{L_*} = 2 \end{aligned}$$

Andauer der Fluktuationen in s

Die Linien entsprechen 5 und 25 Ereignissen von 1000 möglichen (5 und 25 ‰). Ein

Punkt (x,y) gibt die Zahl der Ereignisse einer Schwankung, die mindestens x Sekunden größer oder gleich dem y -Wert $\frac{u'w'}{u_*^2}$ ist.

So sind bspw. 2.5% aller Schwankungen von $u'w'$ bei nahezu neutraler Schichtung für mindestens 2.5 s kleiner als $\overline{u'w'}$. Man sieht, daß große Schwankungswerte von $u'w'$ selten lange überschritten werden. Positive Werte von $u'w'$ sind deutlich seltener als negative.

623. Gemeinsame Häufigkeitsverteilungen

Die gemeinsame Häufigkeitsdichteverteilung (engl. joint probability density distribution) zweier Größen macht Aussagen über das gleichzeitige Auftreten bestimmter Schwankungswerte. Sie wird dargestellt durch Linien gleicher Häufigkeitsdichte für die

normierten Fluktuationen von -3σ bis 3σ . Sind die Größen unkorreliert, so sind diese Linien Kreise, bei einem streng linearen Zusammenhang liegen die Werte auf der Winkelhalbierenden.

Die Linien gleicher Häufigkeitsdichte sind für u' und w' nahezu Ellipsen, die rückwärts geneigt sind, was bedeutet, daß $u' > 0$ häufiger mit $w' < 0$ auftritt und umgekehrt. Abb. 6.8 zeigt die mittlere Verteilung von u' und w' für 11 Runs. Die Linien bezeichnen - von außen nach innen - daß 2.2%, 4.4%, 8.9%, 13.4%, 17.8% und 22.3% aller Wertepaare in einem Intervall von $\pm 0.2\sigma$ um den Wert $(u' w')$ liegen.

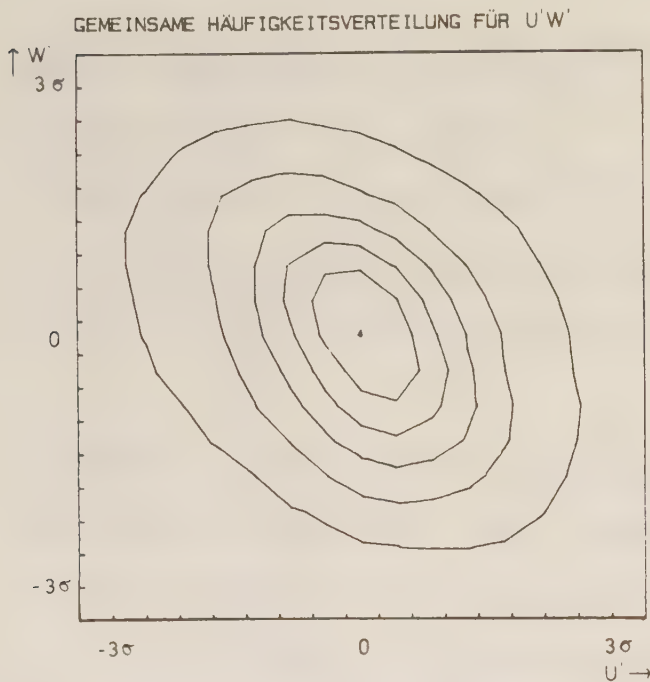


Abb. 6.8

Gemeinsame Häufigkeitsdichteverteilung von u' und w' (Mittel über 11 Runs in drei verschiedenen Höhen)

Für Schwankungen von u' und w' bis etwa $u' \pm \sigma_u$ haben die Ellipsen eine Neigung von 120° , d.h. daß w' stärker schwankt; für größere Schwankungen, die seltener vorkommen, aber einen großen Beitrag zum Impulstransport leisten, ist die Neigung 135° .

Daß die Ellipsenneigung von der Stabilität abhängt, zeigt die Abb. 6.9 aus McBEAN (1974). Die Ellipsen sind umso steiler, je labiler die Schichtung ist (größeres w'). Für nahe-

zu neutrale Schichtung erhält McBEAN eine Neigung von 150° , also flache Ellipsen. Mit $\sigma_u \approx 2 \sigma_w$ stimmen die Normierungen in 6.8 und 6.9 überein.

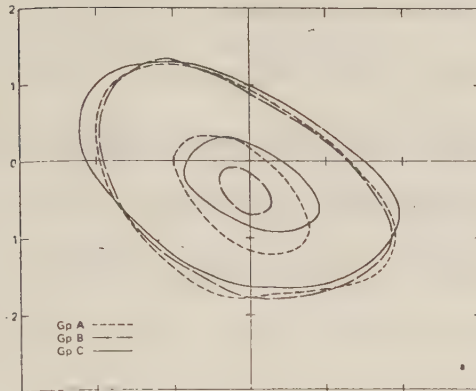


Abb. 6.9

Gemeinsame Häufigkeitsdichteverteilung für $u'/2u_*$ und w'/u_* für drei Stabilitätsklassen

A: labil ($-0.63 \leq \frac{z}{L_*} \leq -0.34$)

B: schwach labil ($-0.34 \leq \frac{z}{L_*} \leq -0.10$)

C: nahezu neutral ($-0.10 \leq \frac{z}{L_*} \leq 0$)

innerer Ring: 2% Wahrscheinlichkeitslinie, äußerer Ring: 0.5%

Wahrscheinlichkeitslinie. nach McBEAN (1974)

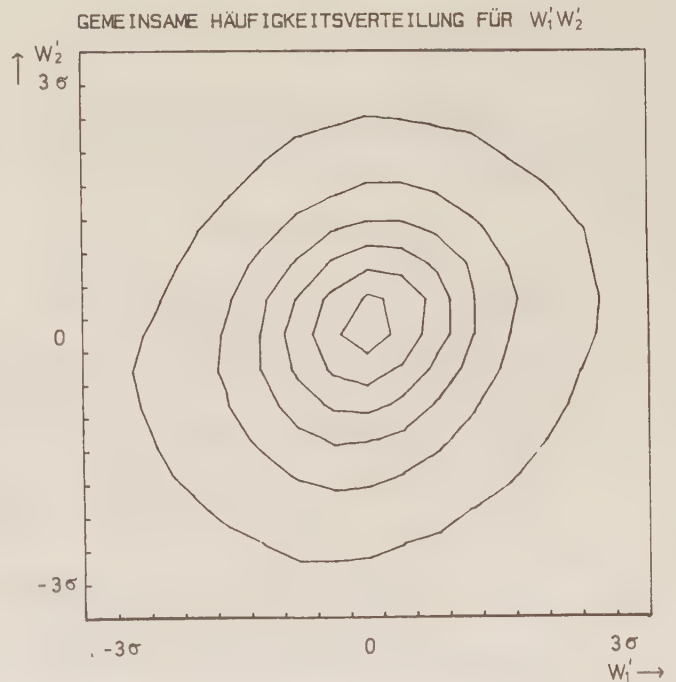
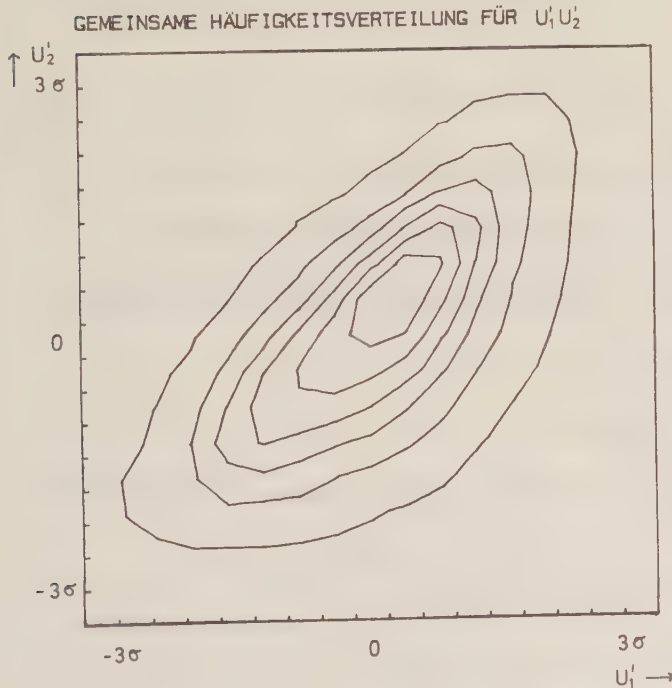


Abb. 6.10

Gemeinsame Häufigkeitsdichteverteilung für $u'(0.8m)$ und $u'(2.2m)$ (links) sowie für $w'(0.8m)$ und $w'(2.2m)$.

Berechnet man die normierten Häufigkeitsverteilungen für Windfluktuationen in verschiedenen Höhen, so kann man etwas über das gleichzeitige Auftreten bestimmter Schwankungen in diesen Höhen aussagen. In Abb. 6.10 sind die Häufigkeitsdichteverteilungen für u' und w' in den beiden unteren Höhen dargestellt. Die Ellipsenneigung beträgt 45° . Man sieht, daß für die u' -Komponente der Zusammenhang sehr streng ist und für die w' -Komponente kaum noch vorhanden ist. Das bedeutet aber nur, daß gleichzeitige Fluktuationen von w' in diesen zwei Höhen nahezu unkorreliert sind.

Ähnlich schwach ist der Zusammenhang zwischen u' in einer und w' in einer anderen Höhe, wie die Abb. 6.11 für u' in 2.2 m Höhe und w' in 0.8 m Höhe zeigt.

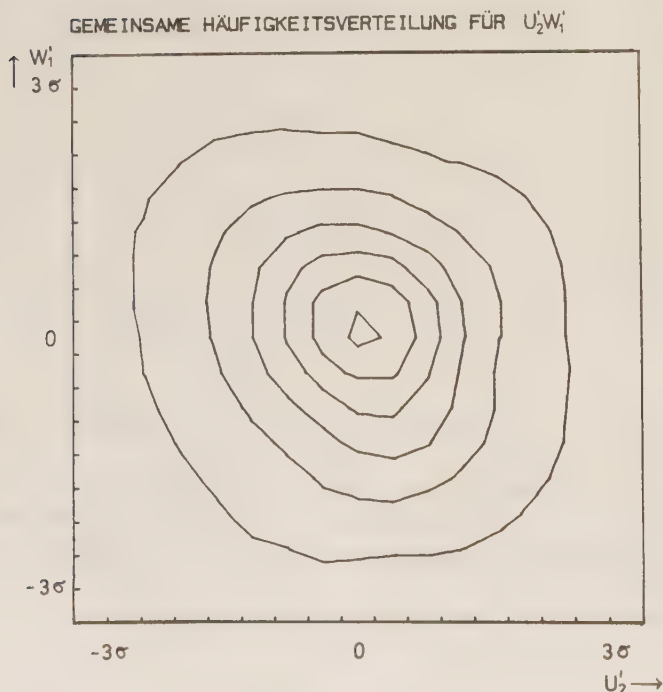


Abb. 6.11

Gemeinsame Häufigkeitsdichteverteilung von u' (2.2 m) und w' (0.8 m)

Hier reicht zur Erforschung des Zusammenhanges die statistische Untersuchung der Prozesse ohne Berücksichtigung ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge nicht aus.

63. Varianzen, Kovarianzen

Ein gutes Maß für die Anisotropie und Inhomogenität der turbulenten Strömung liefern die Varianzen der Windschwankungen, die als Integralmaße jedoch nur etwas über die Gesamtwirkung der Turbulenz aussagen.

Da bei dynamisch erzeugter Turbulenz die kinetische Energie aus der mittleren Strömung ausschließlich in die u' -Komponente übertragen wird und erst durch die Wirkung der Druckkräfte auf die andere Komponenten weitergegeben wird, ist die Varianz von u' größer als die von v' und w' .

In Tabelle 6.2 sind Ergebnisse verschiedener Autoren über die Verhältnisse der Wurzeln der Varianzen für nahezu adiabatische Schichtung zusammengefaßt.

Die Anisotropie äußert sich nicht nur in den unterschiedlichen Varianzen für die Windkomponenten sondern auch in einer nicht verschwindenden Kovarianz zwischen u' und w' . Der Korrelationskoeffizient r_{uw} gibt die Güte einer linearen Beziehung zwischen u' und w' an; den Wert von -0.33 kann man so deuten, daß über ein Drittel der Zeit bzw. des Raumes u' und $-w'$ völlig miteinander korrelieren und über den Rest unkorreliert sind.

Über die Höhenabhängigkeit der Varianzen und der Kovarianz gibt es einige Untersuchungen sowie Ansätze zur formelmäßigen Beschreibung, die aber meist $\frac{\sigma_u}{\bar{u}}(z)$ erfassen und somit noch das Windprofil enthalten (vgl. SWANSON u. CRAMER (1965)).

WAMSER (1976) erhält eine Abnahme von σ_u und σ_w von 50 auf 110 m.

Tabelle 6.2

Wurzeln aus den Varianzen der Windfluktuationen (normiert mit u_*)
und Verhältnisse zueinander

Autoren	$\frac{\sigma_u}{u_*}$	$\frac{\sigma_v}{u_*}$	$\frac{\sigma_w}{u_*}$	$\frac{\sigma_u}{\sigma_w}$	$\frac{\sigma_u}{\sigma_v}$	$\frac{\sigma_v}{\sigma_w}$	r_{uw}	Meßhöhe
zitiert in								
LUMLEY u.	2.1-	1.3-	0.7-	1.6-	0.8-	1.0-		2-91 m
PANOFSKY (1963)	2.9	2.6	1.3	4.0	2.2	3.7		
PIELKE u.								
PANOFSKY (1970)	2.3							18 m
zitiert in								
BRUTSAERT (1970)				2.38		1.90		
zitiert in								
MONIN u.								
YAGLOM (1971)	2.3	1.7	1.25	1.84	1.35	1.36	-0.35	
HAUGEN et.al.			1.3-					5.66,
(1971)			1.35				-0.27	22.6 m
KAIMAL et.al.								
(1972)							-0.31	
WESELY (1974)	2.5	1.83	1.23	2.03	1.37	1.49		0.6-2.6 m
SHIOTANI (1975)	2.4							80.8, 110.8 m
WAMSER (1976)			1.36					50 m
zitiert in	2.3-	1.3-	1.2-	1.6-	0.9-	0.9-		0.5-91 m
SHARAN (1976)	2.9	2.6	1.4	2.4	2.2	2.2		
zitiert in								
ARIEL' u. NA-	1.8-	1.6-	0.9-	1.3-	0.8-	1.1-		
DEZHINA (1976)	2.5	2.2	1.4	2.8	1.6	2.4		
eigene Er-								
gebnisse	2.49	1.97	1.21	2.00	1.27	$\leftarrow +)$ 1.57	$++)$ -0.33	0.8 m

+) gemittelt über 9 Runs ++) gemittelt über 6 Runs

Bei den in Meppen gemessenen Daten lassen sich wegen der teilweise sehr großen Streuung der Einzelergebnisse und wegen der geringen Höhen keine zuverlässigen Angaben zur Höhenabhängigkeit machen.

64. Spektren

Momente und Verteilungen sagen nur etwas über die Häufigkeit des Auftretens großer und kleiner Schwankungen der Größen aus, insbesondere im Vergleich mit der Normalverteilung. Man weiß jedoch nichts darüber, wie die Fluktuationen aufeinanderfolgen oder sich wiederholen. Die üblichen Methoden, die die Statistik zur Untersuchung von Zeitreihen anbietet, sind Korrelationsrechnungen und die spektrale Analyse, wobei sich letztere in der Meteorologie eingebürgert hat.

641. Energiespektren

Die spektrale Energiedichte (auch Energiespektrum, Leistungsspektrum, engl. power spectrum) der Geschwindigkeitskomponenten ist im Wellenzahlbereich von 10^{-3} bis 10^2 m^{-1} aus vielen Messungen bekannt. Für den Trägheitsbereich kennt man die theoretische Beschreibung ("- $\frac{5}{3}$ -Gesetz") und für den Bereich der energieenthaltenden Wirbel gibt es empirische Formeln für $\phi(\kappa)$ (vgl. etwa DAVENPORT (1961), HINO (1971), BUSCH, TENNEKES u. PANOFSKY (1973)). Die formelmäßige Beschreibung des Anstiegs des Spektrums von sehr großen Periodendauern ($\sim 1\text{h}$) bis zum Maximum ist wohl prinzipiell nicht möglich, da hier äußere Einflüsse wie die Bodenbeschaffenheit, makro- und mesoskalige Windsysteme und die großräumige Temperaturverteilung Einfluß nehmen (vgl. 43.); außerdem ist bei den üblichen Meßmethoden - eindimensionale Messung

in x-Richtung - der berechnete Spektralwert für die langen Wellen nicht mehr proportional dem Varianzbeitrag für die Wellenzahlen κ_1 (vgl. 33.). Daher soll den berechneten Spektren nur die Lage des Maximums als Information entnommen werden.

Nicht nur die Integrale über die Energiespektren von u' , v' und w' , die Varianzen, sind unterschiedlich, die Anisotropie äußert sich auch in der unterschiedlichen Lage des Maximums, das für u' bei kleineren Wellenzahlen liegt als für v' und w' (vgl. auch 61.). Das erklärt sich aus der Erzeugung der Turbulenzenergie, die zunächst bei kleinen Wellenzahlen in die u' -Komponente geht und über den Druckterm, etwa durch $\overline{p' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t}$ auf die v' -Komponente übertragen wird. Da die Scherung $\frac{\partial u'}{\partial x}$ vornehmlich an den Rändern großer Wirbel groß ist, wird die Turbulenzenergie auf kleinere Gebiete übertragen. Die Lage des Maximums hängt ferner wesentlich von der Stabilität ab; hier soll aber nur dynamische Turbulenz und daher nur Spektren bei nahezu adiabatischer Schichtung betrachtet werden. Üblicherweise werden sie in normierter Form dargestellt: $\Phi_{ii}(f)/\sigma_{ii}^2$ oder $\Phi_{ii}(f)/u_*^2 \Phi_\epsilon^{\frac{2}{3}}$ mit $\Phi_\epsilon = kz\epsilon/u_*^3$ (dimensionslose Dissipation) gegen $\log n$ mit $n = \frac{fz}{\bar{u}} = \kappa z$, hierbei wird Φ_{ii} mit der Frequenz multipliziert, denn wegen

$$\int_0^\infty \Phi_{ii}(f) df = \int_0^\infty f \Phi_{ii}(f) d \ln f = \sigma_{ii}^2 \quad (6.1)$$

ist auch bei dieser Darstellung die Fläche unter der Kurve proportional der Varianz. Da auch $f \Phi_{ii}$ einige Zehnerpotenzen überstreicht, stellt man meist $\log(f \Phi_{ii}(f)/\sigma_{ii}^2)$ gegen $\log n$ dar. Diese Darstellung wird hier verwendet.

Tabelle 6.3

Lage des Maximums der Energiespektren und des Cospektrums, angegeben als dimensionslose

Frequenz n bzw. als Wellenzahl κ in m^{-1} aus der Darstellung $f Co_{ij}$ gegen $\log n$ bzw. $\log \kappa$.

Autoren	n	u'	κ	n	v'	κ	n	v'_H	κ	n	w'	κ	n	u',w'	κ	Bemerkungen
DAVENPORT (1961)								.001								12-153 m
WEILER, BURLING (1967)	.4															stabil
McBEAN, MIYAKE (1972)	.06															labil
BUSCH, LARSEN (1972)	.047													.2		neutral, 2m
KAIMAL et.al. (1972)	.06			.2												neutral,
BUSCH, TENNEKES, PANOFSKY (1973)	.025-.06			.1-.4										.06		5.66-22.6m
SHIOTANI (1975)														.08		
SMEDMAN-HÖGSTRÖM, HÖGSTRÖM (1974)																z in m, 50.8-150.8m
eigene Ergebnisse	.010	.012		.028	.035			.001-.01								labil, .5-30m
	.013	.006		.040	.018											0.8m nahezu
	.028	.004		.056	.008									.01	.01-.02	2.2m neutral
														.02	.01	7.0m

In Tabelle 6.3 ist aus einigen Arbeiten die Lage des Maximums angegeben. Die Meppener Ergebnisse zeigen, daß das Maximum des u-Spektrums für nahezu neutrale Schichtung je nach Meßhöhe bei Wellenlängen zwischen 80 und 250 m liegt, das des v-Spektrums bei 30-120 m und das des w-Spektrums bei 1-4 m. Abb. 6.12 zeigt für 0.8 m Höhe die mit σ^2 normierten Spektren gegen die Wellenzahl aufgetragen.

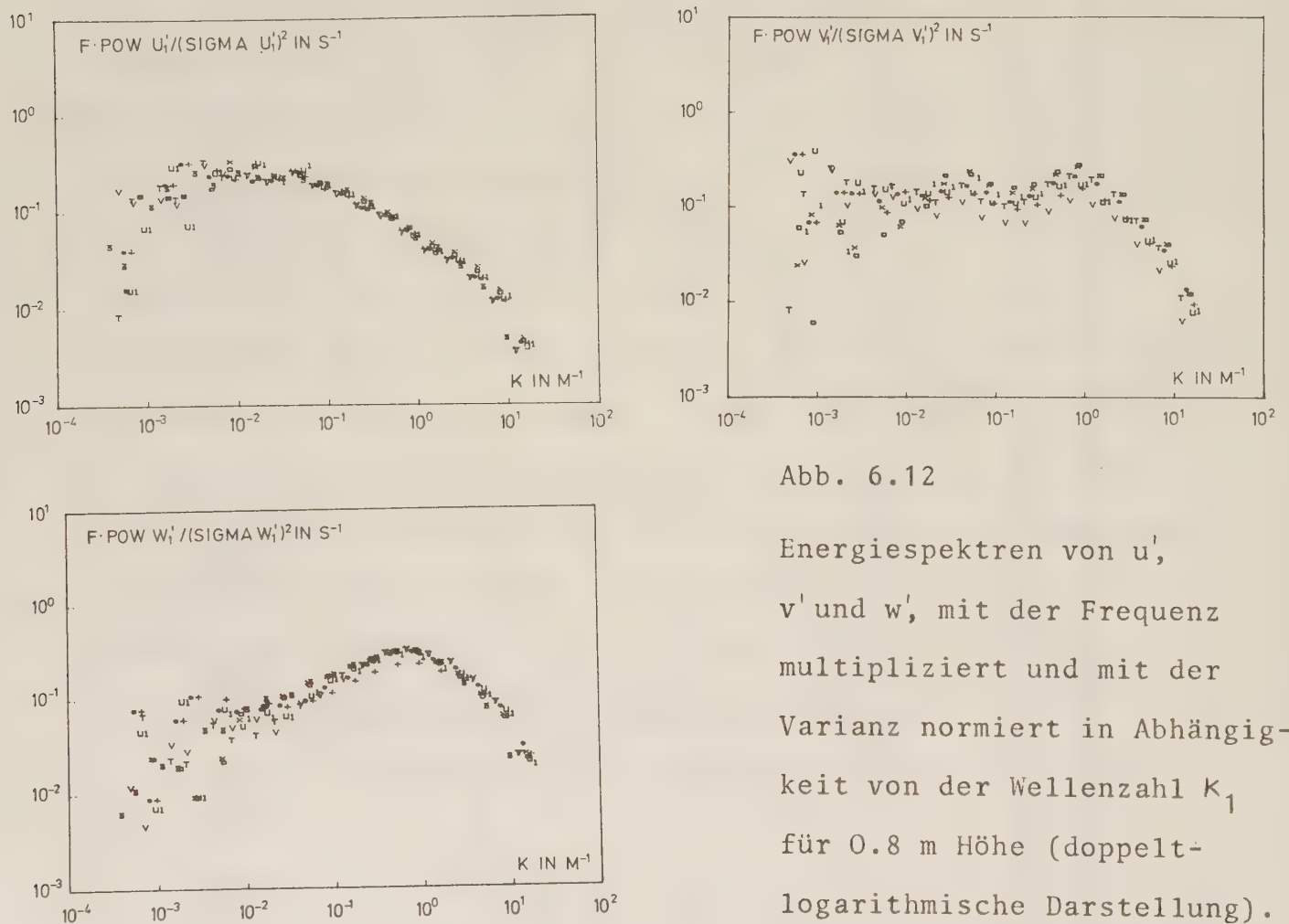


Abb. 6.12

Energiespektren von u' , v' und w' , mit der Frequenz multipliziert und mit der Varianz normiert in Abhängigkeit von der Wellenzahl K_1 für 0.8 m Höhe (doppelt-logarithmische Darstellung). (Symbole s. Tabelle 6.1)

Man erkennt die große Streuung der Spektralwerte für kleine Wellenzahlen, welche eine Aussage über die Art des Anstiegs vom "spectral gap" zum Maximum nicht zuläßt.

Die Lage des Maximums verschiebt sich mit zunehmender Höhe zu

kleineren Wellenzahlen. Nach der Monin-Obukhov'schen Ähnlichkeitstheorie fallen die normierten Spektren zusammen, wenn man sie gegen $n = \frac{fz}{u} = \kappa z$ darstellt. Daraus ergibt sich eine theoretische Höhenabhängigkeit der Maximumwellenzahl von

$$\kappa_{\max} \sim \frac{1}{z} \quad (6.2)$$

(s.a. PANOFKY (1973)). CHIBA (1976) erhält für adiabatische Schichtung und Höhen bis 16 m ein höhenkonstantes $\kappa_{\max} z$. NAITO u. KONDO (1974) geben eine Zunahme der dimensionslosen Maximumfrequenz für das u-Spektrum mit der Höhe an, die einem Potenzgesetz folgt

$$n_{\max} = 0.0042 z^{0.66}, \quad z \text{ in m} \quad (6.3)$$

(Abb. 6.13), ebenso HINO (1971), der $n_{\max} \sim z^a$ mit $a = 0.6 \dots 0.8$ erhält.

In Abb. 6.14 ist für die Mep-pener Daten die Höhenabhängigkeit der u-Spektren angedeutet; dort ist die Wellenzahl des Maximums (x) und die Wellenzahl des mit der Frequenz multiplizierten Spektralwerts von 10^{-1} (+), der für alle drei Höhen im Trägheitsbereich ($-\frac{5}{3}$ - Bereich) liegt, gegen die Höhe aufgetragen. Man erkennt eine Verschiebung zu kleineren Wellenzahlen mit der Höhe, die aber schwächer als $\kappa \sim \frac{1}{z}$ ist.

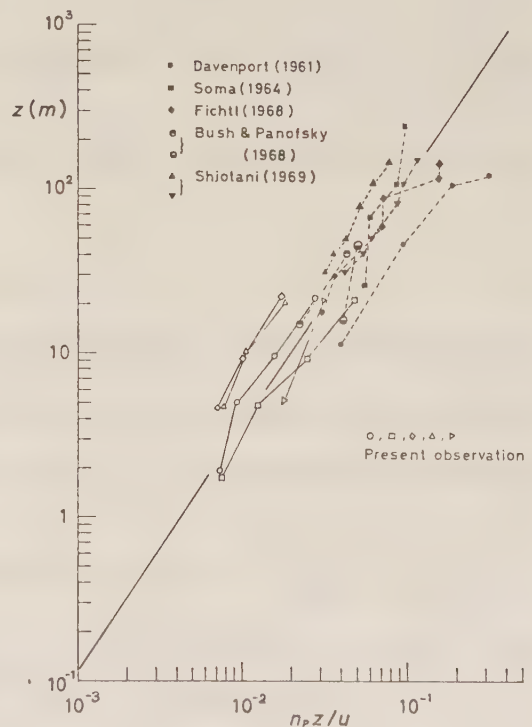


Abb. 6.13

Höhenabhängigkeit der dimensionslosen Maximumfrequenz für das u-Spektrum nach NAITO u. KONDO (1974)

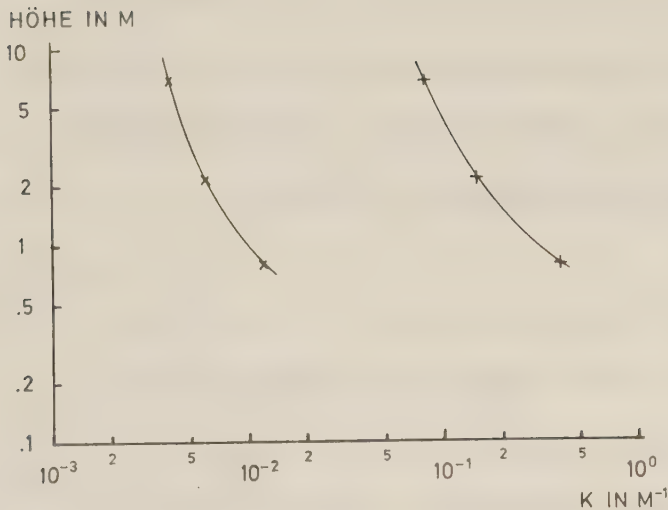


Abb. 6.14

Abhängigkeit der Maximumwellenzahl des u-Spektrums (x) und der Wellenzahl κ mit $f \phi_u(\kappa) = 10^{-1}$ (+) von der Höhe (doppelt logarithmische Darstellung)

642. Kreuzspektren von u' und w'

Wie in 322. erwähnt lassen sich die Kreuzspektren von zwei Größen darstellen durch Co- und Quadraturspektrum sowie durch Kohärenz- und Phasenspektrum.

Da das Integral über das Cospektrum von u' und w'

$$\int_{-\infty}^{\infty} Co_{uw}(f) df = u_*^2 \quad (6.4)$$

proportional zur Schubspannung ist und man folglich den Beitrag jedes Wellenzahlbereichs zur Schubspannung ablesen kann, wird üblicherweise das Cospektrum dargestellt.

Auch hier gibt es formelmäßige Beschreibungen empirischer Spektren im Trägheitsbereich und im Bereich des Maximums (vgl. etwa WYNGAARD u. COTÉ (1972)). Dieses liegt zwischen dem Maximum des u-Spektrums und dem des w-Spektrums. Man findet allerdings in der Literatur wenig übereinstimmende Angaben sowohl über die Lage des Maximums als auch über möglich Potenzgesetze im Trägheitsbereich (vgl. SITARAMAN (1970): $-\frac{5}{3}$ -Gesetz,

KAIMAL et.al. (1972): $-\frac{7}{3}$ -Gesetz, FIEDLER u.FREYTAG (1977): $-\frac{7}{3}$ -Gesetz). Aus den Meppener Daten erhält man ein Maximum des Cospektrums für Wellenlängen von 50 - 200 m. In Abb. 6.15 sind die Cospektren für 0.8 und 2.2 m Höhe darstellt.

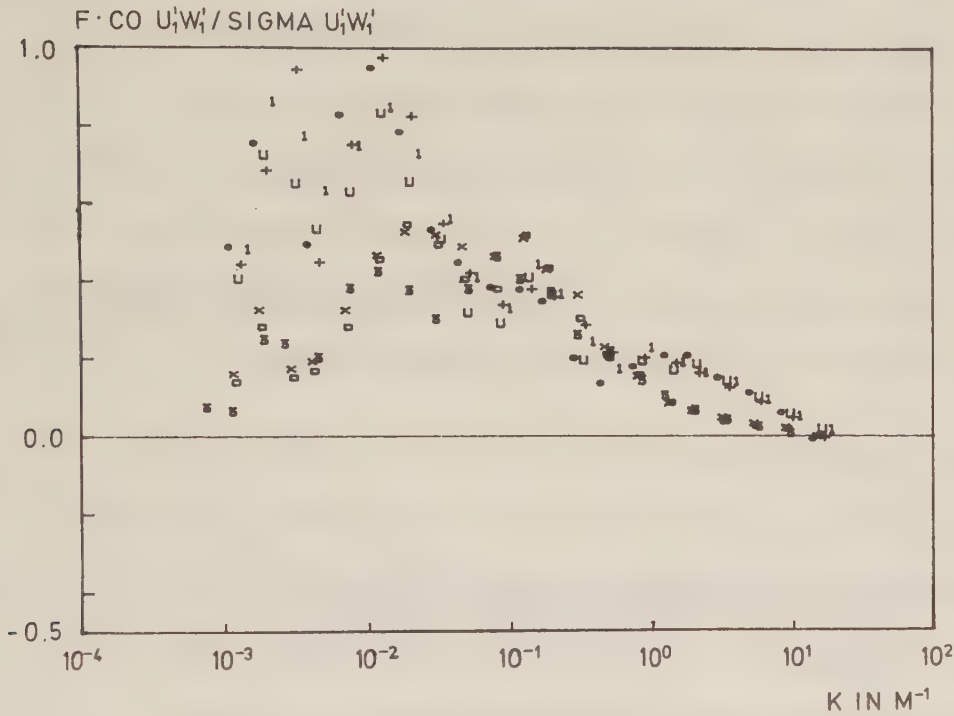
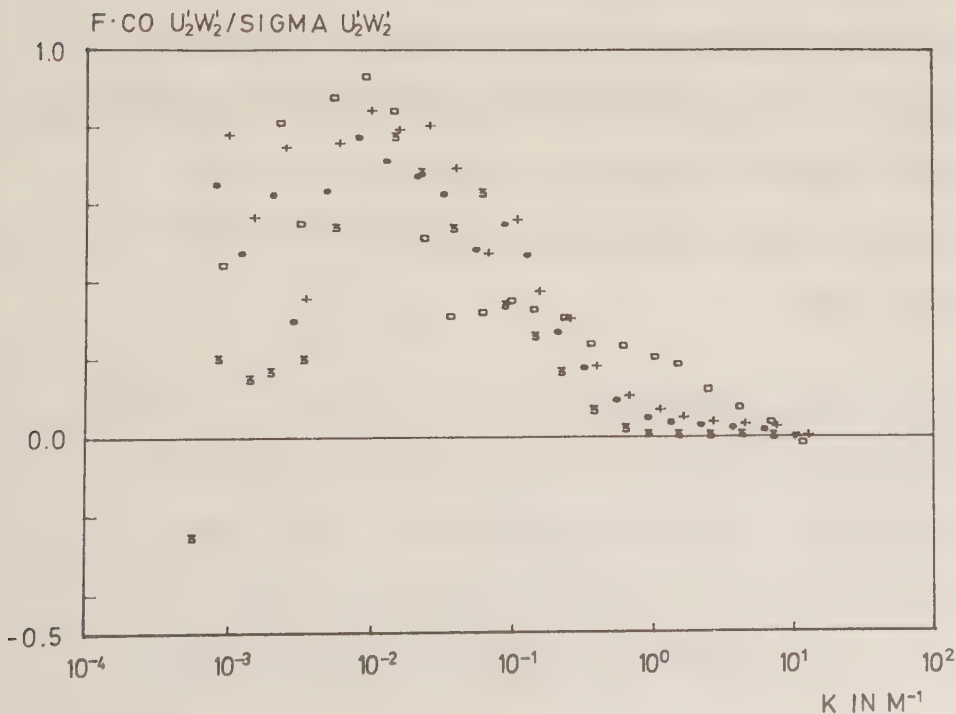


Abb. 6.15

Cospektrum von u' und w' mit der Frequenz multipliziert und mit γ_{uw} normiert
0.8 m Höhe (oben) und 2.2 m Höhe (unten) in Abhängigkeit von der Wellenzahl K_1 .



Bei der großen Streuung der Werte kann man über die Änderung der Maximumwellenlänge mit der Höhe nichts aussagen.

Das Cospektrum gibt die Amplituden der Schwingungen an,

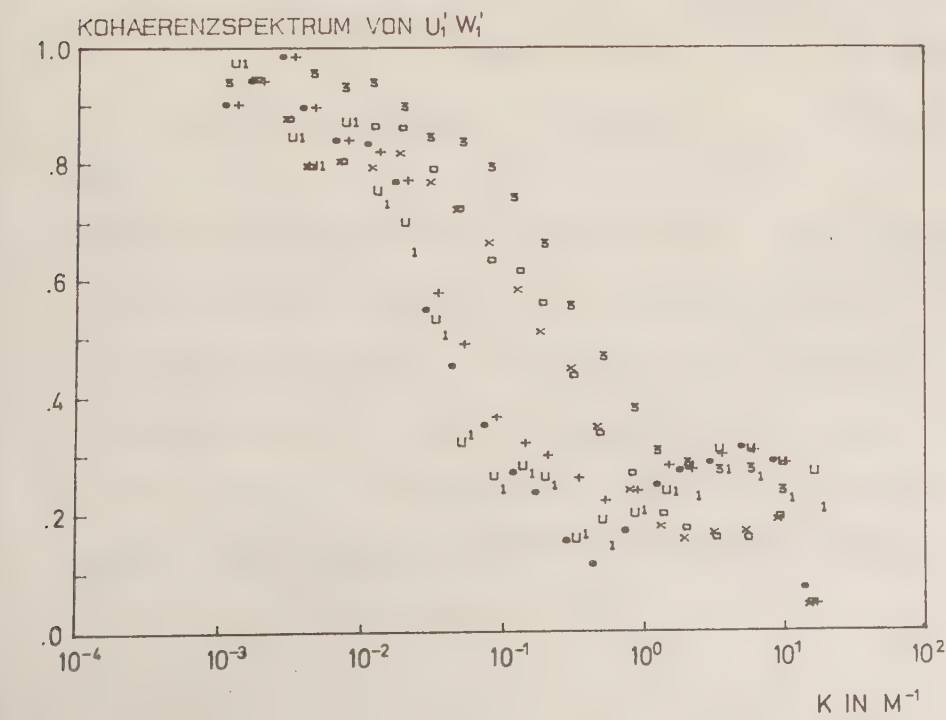
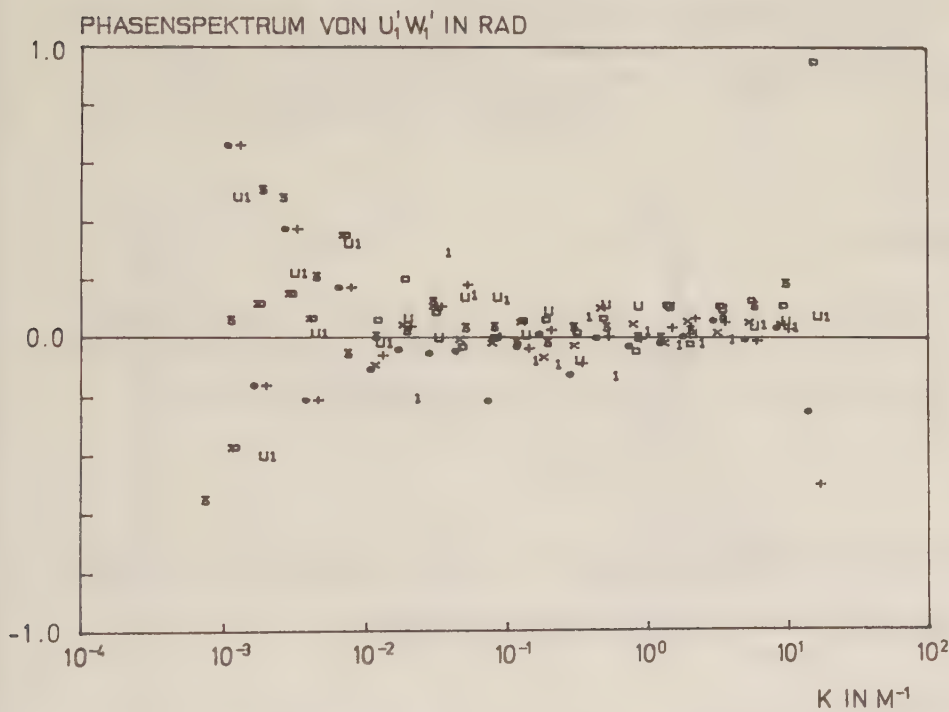
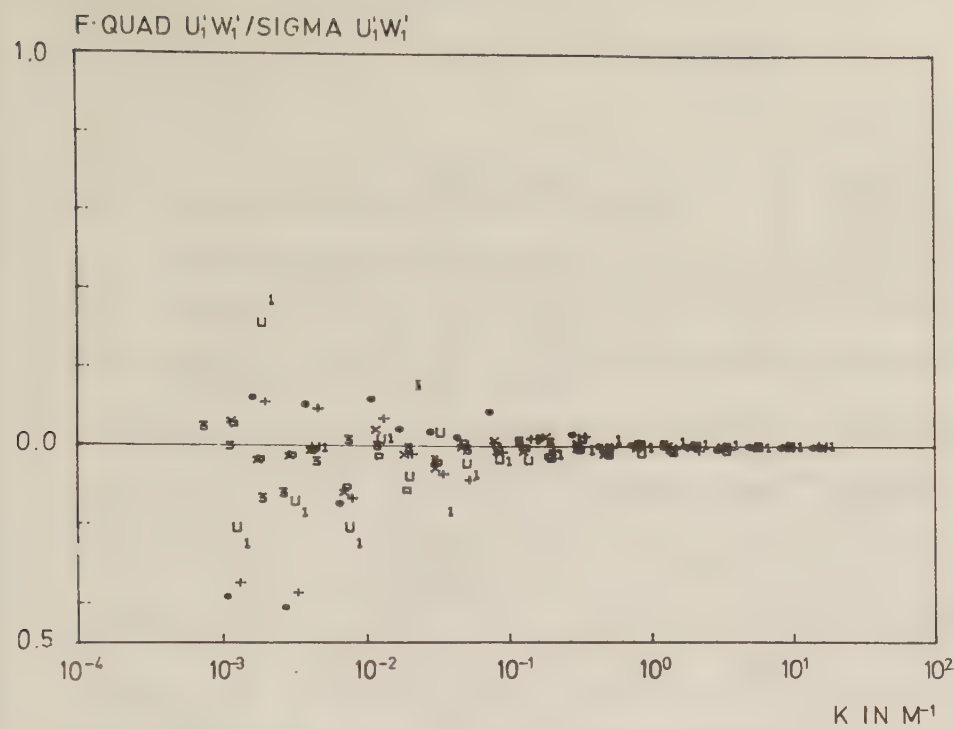
mit denen man den symmetrischen Teil der Korrelation zwischen u' und w' beschreiben kann, also der gleichphasigen Schwingungen. Diese liefern im Integral über alle Wellenzahlen die Schubspannung. Das Quadraturspektrum dagegen beschreibt den antisymmetrischen Teil (s. Abb. 6.16). Die Amplituden sind wesentlich geringer, und für kleine Wellenlängen ab etwa 10m kann man diesen Anteil vernachlässigen. Das erkennt man auch am Phasenspektrum, welches -modulo 2π - die Phasenbeziehung zwischen den beiden Prozessen u' und w' angibt; es gibt keinen merklichen Phasenunterschied, das Aufspalten bei kleinen Wellenzahlen ist wohl auf die Unsicherheit dieser Meßpunkte zurückzuführen.

Wie effektiv die Beziehung zwischen u' und w' ist zeigt das Kohärenzspektrum (Abb. 6.16). Es gibt die spektrale Verteilung des Korrelationskoeffizienten von u' und w' an und entspricht hier etwa dem Cospektrum, gewichtet mit der spektralen Verteilung der Wurzeln aus den Varianzen der Einzelprozesse. Für lange Wellen bis etwa 10 m ist die Korrelation sehr hoch, hier besteht - bis auf Phasenverschiebungen - ein strenger Zusammenhang zwischen u' und w' . Für kleinere Wellenlängen besteht keine wirksame Koppelung mehr. In dem Bereich, in dem die Kohärenz noch nahezu 1 ist und die Phase gerade sehr klein wird, hat das Cospektrum sein Maximum.

Ein ähnliches Verhalten des spektralen Korrelationskoeffizienten (nur gleichphasige Anteile!) findet man bei WEILER u. BURLING (1967). Allerdings fällt hier die Korrelation für sehr lange Wellen wieder ab, da WEILER u. BURLING nur das Cospektrum und nicht den Betrag von Co- und Quadraturpektrum normiert haben.

Abb. 6.16

Quadraturspektrum
von u' und w' ,
normiert mit
 σ_{uw} und multi-
pliziert mit der
Frequenz (oben),
Phasenspektrum
von u' und w'
(Mitte) und Ko-
härenzspektrum
nach (3.18)
von u' und w' für
0.8 m Höhe gegen
die Wellenzahl K_1 .



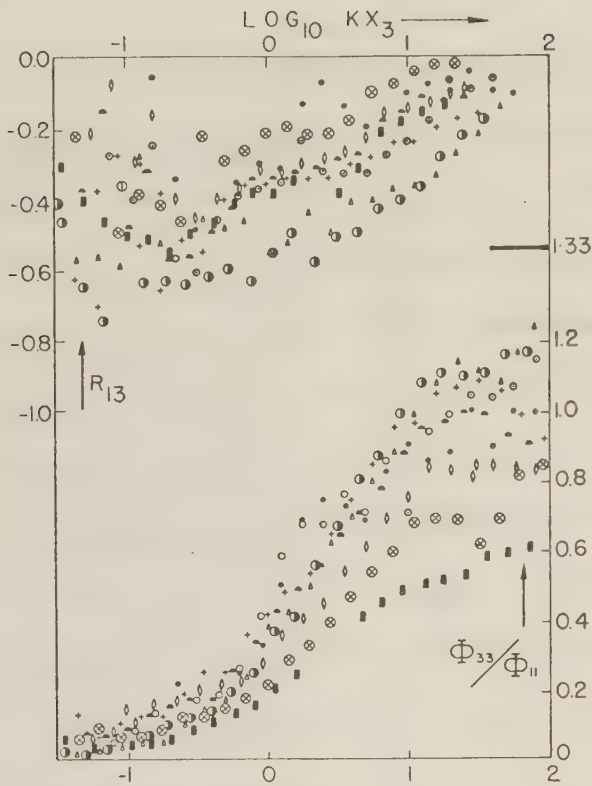


Abb. 6.17

Normiertes Cospektrum $Co_{uw}/(\phi_u \phi_w)^{1/2}$ (linke Skala) und Verhältnis der Energiespektren ϕ_w/ϕ_u (rechte Skala) in Abhängigkeit von der normierten Wellenzahl KX_3 . $\circ \triangle$ stabil, alle anderen labil, nach WEILER u. BURLING (1967).

65. Korrelationsfunktionen

Wie in 33. erläutert liefern Korrelationsfunktionen unverfälschtere Information über die großskaligen Anteile der Turbulenz als die Spektralfunktionen.

Bei der in Meppen gewählten Meßanordnung kann man den Korrelations-tensor $R_{ij}(\vec{r})$ für folgende Funktionswerte berechnen:

Verschiebungen in x-Richtung

$$\text{von } \Delta x_{\min} = \pm \Delta t_{\min} \bar{u} \quad \text{mit } \Delta t_{\min} = 0.01 \text{ s}$$

$$\text{bis } \Delta x_{\max} = \pm \frac{T}{10} \bar{u} \quad \text{mit } T = \text{Meßdauer} = 30 \text{ min}$$

Verschiebungen in z-Richtung

$$z = 0.8 \text{ m} \quad \Delta z = 1.4 \text{ m}, 6.2 \text{ m}$$

$$z = 2.2 \text{ m} \quad \Delta z = -1.4 \text{ m}, 4.8 \text{ m}$$

$$z = 7.0 \text{ m} \quad \Delta z = -4.8 \text{ m}, -6.2 \text{ m}$$

Bei der Berechnung der Korrelationsfunktionen wurden lineare Trends eliminiert.

651. Autokorrelationsfunktionen

Das Analogon zum Energiespektrum ist im Zeitbereich die Autokorrelationsfunktion. In der Literatur findet man relativ wenige Beispiele für Korrelationsfunktionen und diese im wesentlichen für horizontale Windschwankungen (PANOFSKY (1962), SHIOTANI u. IWATANI (1976) u.a.). Einige Autoren (etwa PANOFSKY u. SINGER (1965), CHOI C.C. (1971)) geben formelmäßige Beschreibungen für die Funktionen an, die aber - bis auf die bekannte Beschreibung des Trägheitsbereiches durch ein Potenzgesetz (s. 33.) - ohne physikalischen Hintergrund sind.

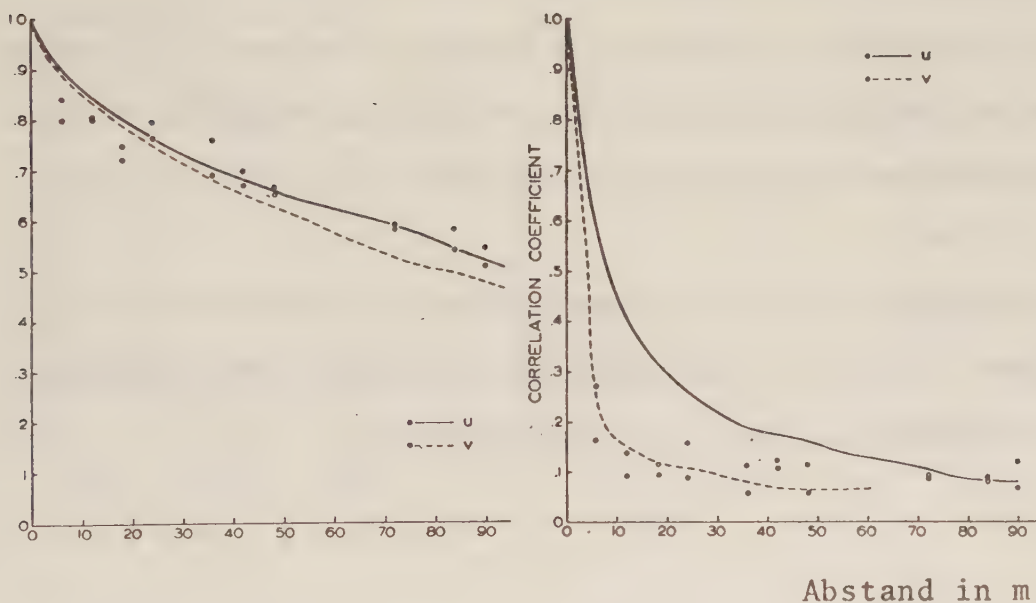


Abb. 6.18

Typische Autokorrelationsfunktionen für Tag (links) und Nacht (rechts). Die Linien geben die Korrelationsfunktionen entlang der Windrichtung an (durchgezogen: u, gestrichelt: v). Die Punkte bezeichnen die Korrelationsfunktion entlang der Anemometerlinie (—u, --v), Winkel zwischen Windrichtung und Anemometerlinie links: 37° , rechts: 40° . nach PANOFSKY (1962)

Selbstverständlich äußert sich auch der Schichtungseinfluß deutlich in den Korrelationsfunktionen, wie die Abb. 6.18 nach PANOFSKY (1962).

Betrachtet man adiabatische Schichtungen, bei denen die Turbulenz mechanisch erzeugt wird, so liefert die Autokorrelationsfunktion quantitative Aussagen über die Turbulenzstruktur. Die Anisotropie äußert sich einmal in dem unterschiedlichen Verlauf der Kurven und den unterschiedlichen Skalen für die drei Windkomponenten und zum anderen in den Unterschieden für Verschiebungen in longitudinaler und vertikaler Richtung. Die Inhomogenität erkennt man an der Änderung der Skalen mit der Höhe.

In Abb. 6.19 sind für 0.8 m Höhe die Autokorrelationsfunktionen von u' , v' und w' für Verschiebungen in x-Richtung dargestellt und in Abb. 6.20 die Autokorrelationsfunktionen von u' in 2.2 und 7.0 m Höhe.

Tabelle 6.4 zeigt die quantitativen Ergebnisse, Integralskala L und Mikroskala λ sowie die Semiskala $\tilde{L}$, diejenige Verschiebung, bei der die Korrelation auf 0.5 abgenommen hat.

Abb. 6.19

Autokorrelations-
funktionen von u'
(oben), v' (Mitte)
und w' (unten) für
0.8 m Höhe für Ver-
schiebungen r in
 x -Richtung. (Bem.:
Die Verschiebungen
sind in logarith-
mischem Maßstab auf-
getragen, wodurch der
Bereich kleiner Ver-
schiebungen stark
gestreckt wird, bei
linearer Auftragung
fällt die Korrelation
viel rascher auf
kleine Werte ab).

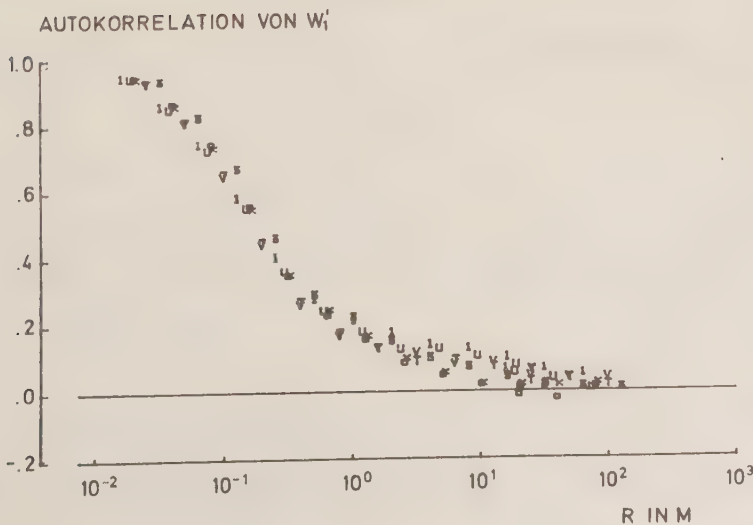
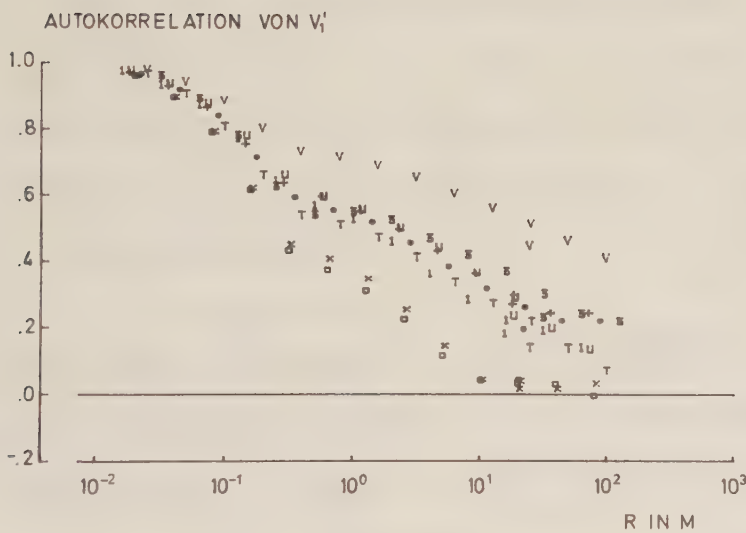
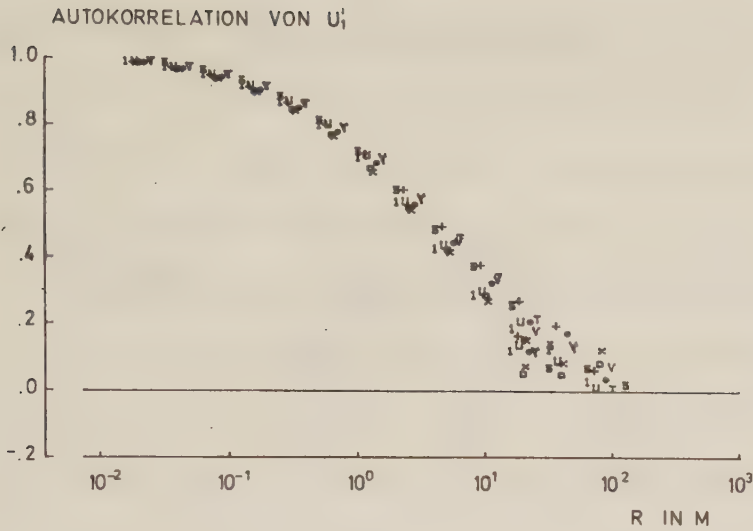


Tabelle 6.4

Längenskalen aus den Autokorrelationsfunktionen von u' , v' und w'

Höhe	L_u	$\tilde{L}_u$	λ_u	L_v	$\tilde{L}_v$	λ_v	L_w	$\tilde{L}_w$	λ_w	in m
0.8 m	25	6	.4	35	3	.2	8	.3	.2	
2.2 m	40	14	.6	40	(1)	.5	16	.9	.3	
7.0 m	56	24	.6	(67)	(30)	.7	17	(1.1)	.3	

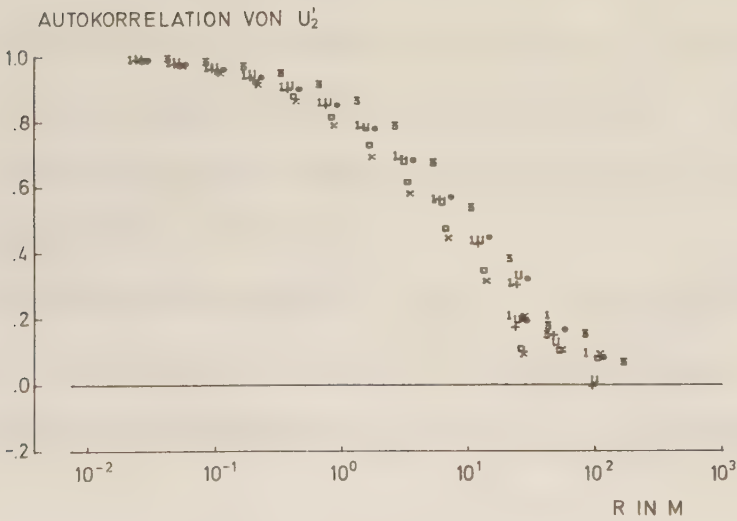
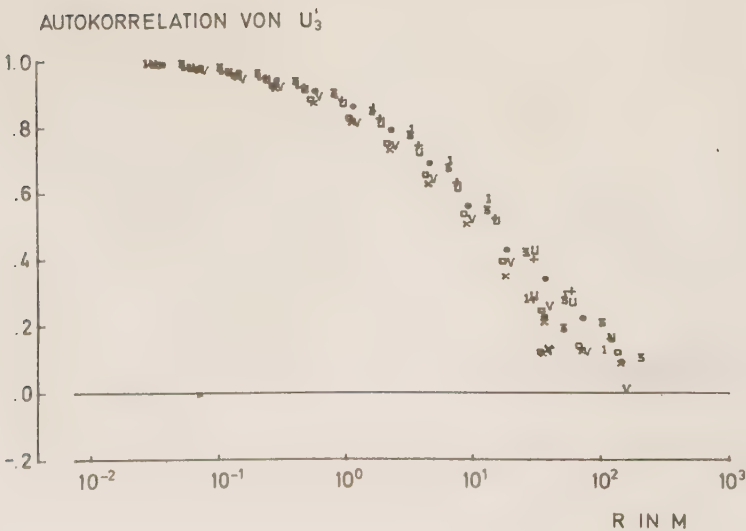


Abb. 6.20
Autokorrelations-
funktionen von u'
für 2.2 m Höhe (oben)
und 7.0 m Höhe (unten)
für Verschiebungen r
in x-Richtung



Für Verschiebungen in Strömungsrichtung ist die Integralskala, die ein Maß für die Wirbelgröße ist, für u' etwa dreimal so groß wie für w' . Die Mikroskala ist für u' etwa doppelt so groß wie für w' . Einen größeren Unterschied weisen die Semiskalen auf, hier ist die u -Skala 15 bis 20 mal so groß wie die w -Skala. Die Semiskalen sind wesentlich kleiner als die Integralskalen, da sie großskalige Störeinflüsse, wie sie bspw. in den v -Korrelationen deutlich erkennbar sind, nicht enthalten. Für u' sind Integral- und Semiskala wesentlich größer als die Meßhöhe. Von 0.8 auf 7.0 m nehmen die Integralskalen etwa auf das doppelte, die Mikroskalen etwas geringer zu.

In einer sehr ausführlichen Tabelle hat SHARAN (1976) die Integralskalen von u' , v' und w' aus mehreren Arbeiten zusammengestellt. Man erkennt ebenfalls, daß die Längenskala für u' etwa dreimal so groß ist wie die für w' , die in der Größenordnung der Meßhöhe liegt.

PANOFISKY (1962), der als Semiskala die Verschiebung bezeichnet, bei der die Korrelation auf 0.6 abgenommen hat, erhält in 2 m Höhe folgende Ergebnisse für Verschiebungen in Strömungsrichtung

$$\begin{array}{ll} L_u = \begin{array}{l} 6.5 \text{ m (stabil)} \\ 34 \text{ m (labil)} \end{array} & L_v = \begin{array}{l} 2.6 \text{ m (stabil)} \\ 55 \text{ m (labil)} \end{array} \end{array}$$

und für Verschiebungen in y -Richtung

$$\begin{array}{ll} L_u = \begin{array}{l} 1 \text{ m (stabil)} \\ 25 \text{ m (labil)} \end{array} & L_v = \begin{array}{l} 1 \text{ m (stabil)} \\ 40 \text{ m (labil)} \end{array} \end{array}$$

Für w' waren die Skalen nicht angegeben, da der Meßfühlerabstand zu groß war.

SHIOTANI u. IWATANI (1976) geben für Starkwindlagen in 40 m Höhe für Verschiebungen in x -Richtung Integralskalen von

$L_H = 105-330$ m für Horizontalwind über See

$L_H = 88-220$ m über Land

und für Verschiebungen in y-Richtung

$L_H = 21-94$ m über See

$L_H = 41-120$ m über Land an.

In größeren Höhen sind also die Längenskalen und damit die Dimensionen den vorherrschenden Wirbel wesentlich größer.

Für vertikale Verschiebungen nehmen die Korrelationen sehr viel rascher ab als für horizontale Verschiebungen. In Abb. 6.21 sind die Korrelationen für die oben angegebenen diskreten Verschiebungen in z-Richtung und zum Vergleich auch in x-Richtung angegeben.

VOLKOV, KOPROV u. KRAVCHENKO (1975), die Korrelationen von w' für vertikale und laterale Verschiebungen berechnet haben, geben für Höhen von 2-4 m und schwach labile Schichtung folgende Längenskalen an:

$$L_{w,z} \approx L_{w,y} \approx \frac{1}{3} z$$

$$L_{u,z} \approx 2 L_{w,z} \quad .$$

Man kann aus den Ergebnissen folgendes ablesen:

Erwartungsgemäß ist für Δx und Δz die Korrelation von u' größer als die von v' und w' . Ferner nehmen die Skalen mit der Höhe zu. Die Korrelation in z-Richtung ist für negative Verschiebungen geringer als für positive. Die Fluktuationen in einer bestimmten Höhe sind mit Fluktuationen in höheren Schichten besser korreliert als mit solchen in niedrigeren Schichten; das ist ein Indiz für die Inhomogenität des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes.

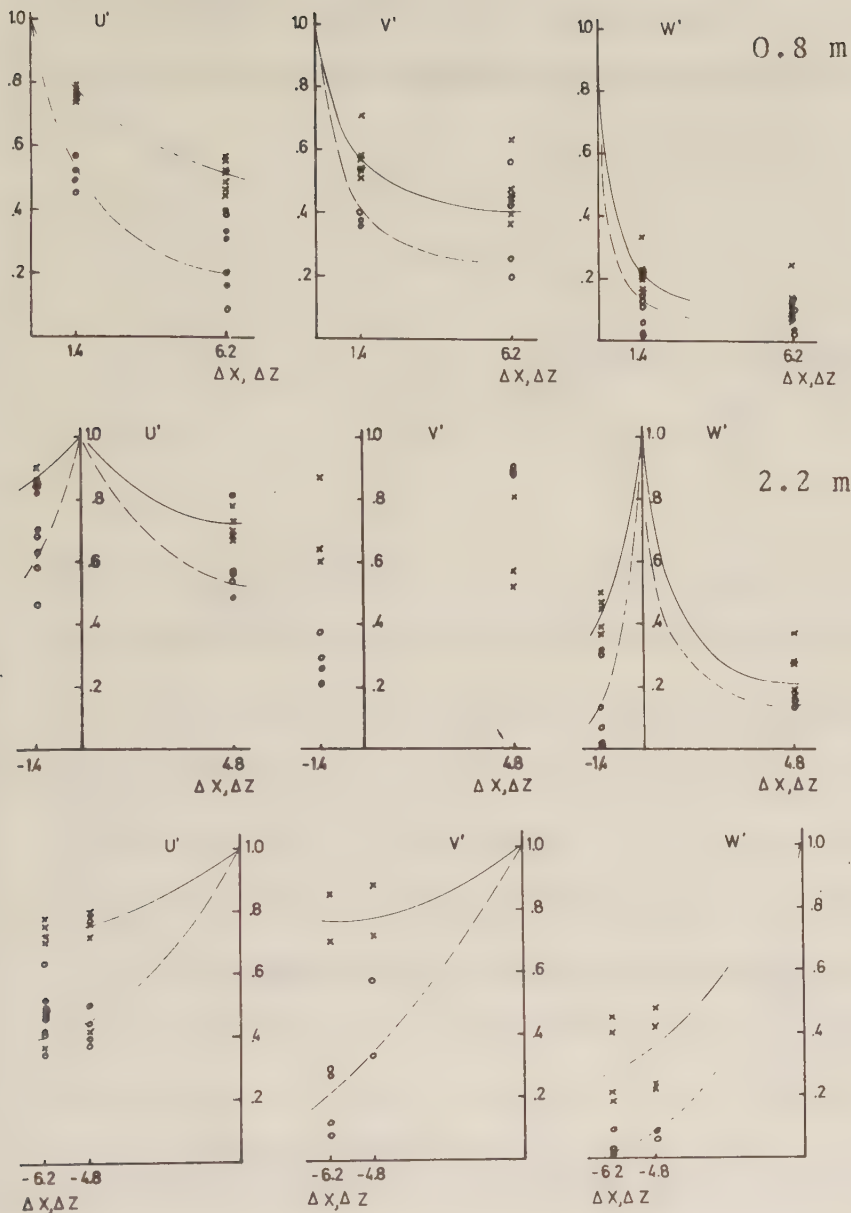


Abb. 6.21

Autokorrelations-
funktionen

von u' , v' und w' für
Verschiebungen in x -
Richtung (x , durchge-
zogene Linie) und in z -
Richtung (o , gestrichelte
Linie) oben: 0.8 m Höhe,
 $\Delta x, \Delta z = 1.4$ und 6.2 m,
Mitte: 2.2 m Höhe,
 $\Delta x, \Delta z = -1.4$ und 4.8 m,
unten: 7.0 m Höhe,
 $\Delta x, \Delta z = -6.2$ und -4.8 m.

7.0 m

652. Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w'

Die normierte Kovarianzfunktion von u' und w' hat ihr Maximum bei einer Verschiebung $\Delta \vec{x} = (0,0,0)$ und fällt monoton ab für zunehmende Verschiebungen. Für Δx und Δy erwartet man Symmetrie (vgl. die sehr geringen Werte des Quadratspektrums Abb. 6.16), nicht aber für Δz . In der Literatur findet man nur wenige Angaben über die Funktion in der bodennahen Turbulenz (bspw. bei DUTTON

u.DEAVEN (1972), die aus Flugzeugmessungen in niedrigen Clear-Air-Turbulence-Gebieten (100-200 m Höhe) Fluktuationswerte gewinnen und Korrelationen berechnen).

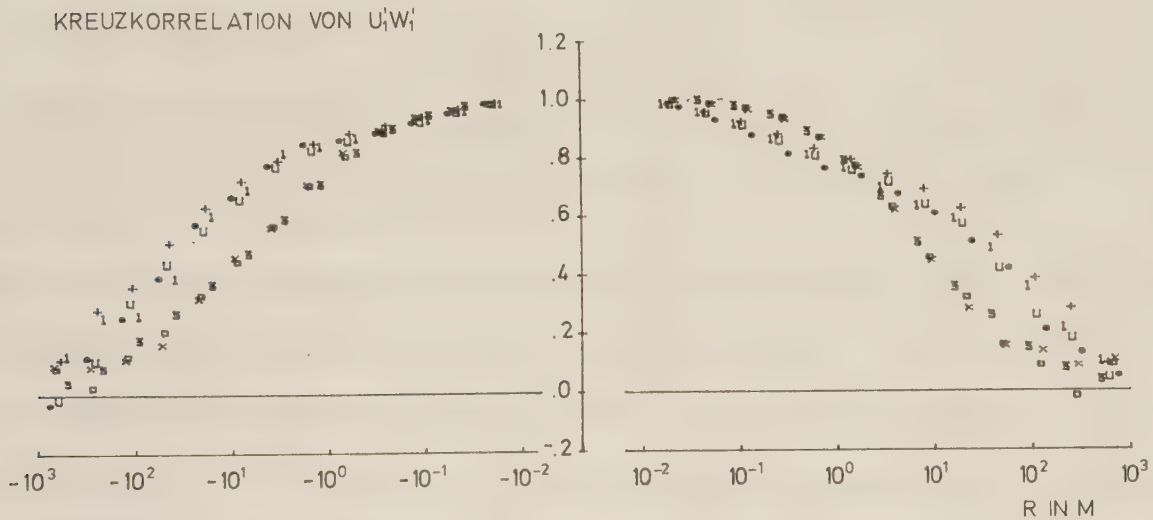


Abb. 6.22

Kreuzkorrelationsfunktion C_{uw} von u' und w' in 0.8 m Höhe für Verschiebungen r in x-Richtung

In Abb. 6.22 ist die Kreuzkorrelationsfunktion C_{uw} für Verschiebungen in x-Richtung dargestellt. Die Kurven sind nahezu symmetrisch.

Im Vergleich zur Autokorrelationsfunktion von u' weist die Kurve eine geringere Mikroskala auf (größere Krümmung im Ursprung bzw. hier: rascherer Abfall auf Werte kleiner 1 bei kleinen Verschiebungen), das bedeutet, daß kleine Wirbel für den Prozeß keine große Rolle spielen. Die Kurve fällt aber langsamer auf Null ab, was die Bedeutung großer Wirbel unterstreicht.

Die quantitativen Ergebnisse sind in Tabelle 6.5 zusammengefaßt.

Tabelle 6.5

Längenskalen aus den Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w'

Höhe	L_{uw}	$\tilde{L}_{uw}$	λ_{uw}	in m
0.8 m	29	8-20	.38	
2.2 m	76	40-100	.33	
7.0 m	199	10-100	.39	

Um die Kreuzkorrelationsfunktion für vertikale Verschiebungen auszuwerten, reicht die Zahl der Meßpunkte nicht aus. Wie bereits erläutert (s. Diskussion zu (2.21)) erwartet man, daß die Korrelation $\overline{u'_2 w'_3}$ besser sein müßte als $\overline{u'_2 w'_1}$, wenn 1, 2 und 3 Höhen $z_1 < z_2 < z_3$ bezeichnen. In Abb. 6.23 sind für u' in 2.2 m Höhe Werte für die Korrelation $C_{uw}(-1.4\text{m}, 0, 0)$ und $C_{uw}(0, 0, -1.4\text{m})$ sowie für $C_{uw}(4.8\text{m}, 0, 0)$ und $C_{uw}(0, 0, 4.8\text{m})$ eingetragen. Man erkennt, daß die Korrelation "nach unten" wesentlich schlechter ist als die "nach oben", welche etwa genau so gut ist wie die "nach vorn" und "nach hinten".

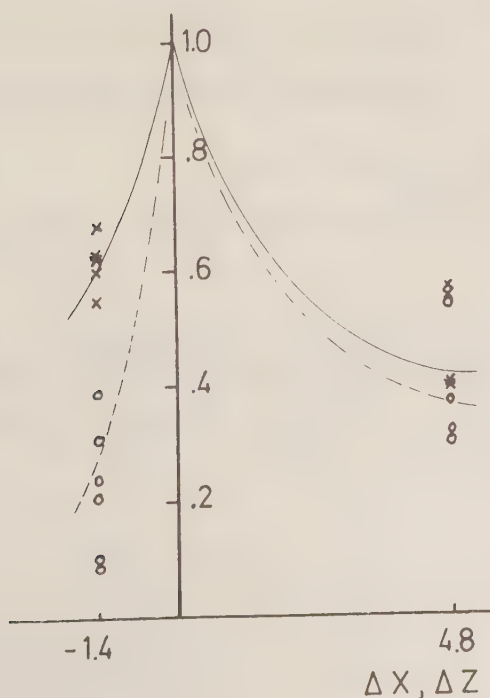


Abb. 6.23

Diskrete Werte der Kreuzkorrelationsfunktion von u' und w' für Verschiebungen in x - und z -Richtung.

x : $C_{uw}(\Delta x, 0, 0, z = 2.2\text{ m})$ ———

o : $C_{uw}(0, 0, \Delta z, z = 2.2\text{ m})$ - - -

Die Kurven sind nach Augenmaß gezogen.

66. Kreuzspektren von Geschwindigkeitskomponenten in verschiedenen Höhen

Einen tieferen Einblick in Strukturen und Zusammenhänge in der turbulenten Grenzschicht erhält man, wenn man die verallgemeinerten 2. Momente - also Kreuzkorrelationsfunktionen und Kreuzspektren - für Geschwindigkeitskomponenten untersucht, die an verschiedenen Orten gemessen wurden.

66.1. Kreuzspektren gleicher Geschwindigkeitskomponenten

Es gibt in der Literatur einige Arbeiten, die Kreuzspektren - im wesentlichen Kohärenz- und Phasenspektren - von Windschwankungen mit einem festen Abstand Δx_i , $i=1,2,3$ angeben. Die Spektren werden in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz $\Delta n_i = f \frac{\Delta x_i}{\bar{u}}$ dargestellt. Sie sind von Δn_i , von der Höhe und i.a. noch von der mittleren Windgeschwindigkeit abhängig.

DAVENPORT (1961) fand, daß sich das Kohärenzspektrum der Horizontal Komponenten in zwei verschiedenen Höhen entsprechend einer Exponentialfunktion ändert

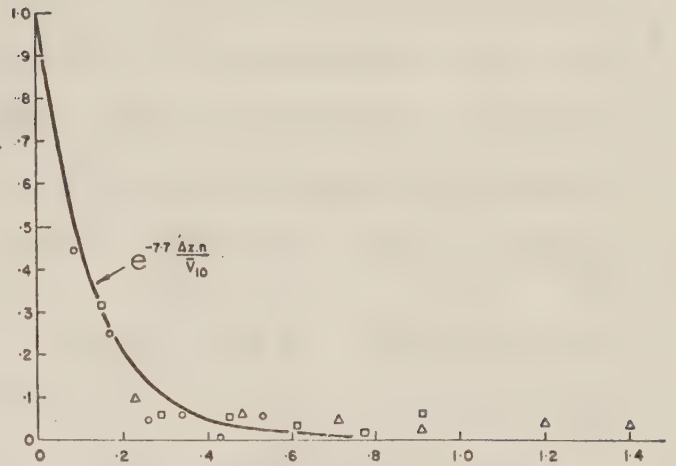
$$\text{Coh}_{v_H' v_H'^*}(f) = \exp \left(-a f \frac{\Delta z}{\bar{u}} \right) = \exp (-a \Delta n) \quad (6.5)$$

(s. Abb. 6.24).

a bezeichnet man als exponentiellen Zerfallsparameter (exponential decay parameter). Je größer a ist, umso rascher fällt das Kohärenzspektrum auf Null ab.

Abb. 6.24

Kohärenzspektrum von Horizontalwindkomponenten in zwei verschiedenen Höhen in Abhängigkeit von $\Delta n = \frac{f \Delta z}{\bar{u}_{10m}}$. Die Kurve gibt Gleichung (6.5) an. Nach DAVENPORT (1961).



ROPELEWSKI, TENNEKES und

PANOFISKY (1973) und MIZUNO (1976) verallgemeinern diesen Ansatz für v' und w' sowie für horizontale Abstände der Meßpunkte

$$\text{Coh}_{u'_i u'_i}(f) = \exp(-a_{ij} \Delta n), \quad i, j=1, 2, 3. \quad (6.6)$$

a_{ij} ist von der Meßhöhe, der mittleren Windgeschwindigkeit und der Stabilität abhängig. a nimmt mit der Höhe ab (SHIOTANI (1975)), ist für u' größer als für v' (PIELKE u. PANOFISKY (1970) für Δn_3) und für w' wesentlich kleiner als für u' und v' (MIZUNO (1976) für Δn_1 und Δn_2).

Ferner wird üblicherweise eine Wirbelneigung (eddy slope) S_{ij} bei einer bestimmten Frequenz f eingeführt mittels

$$S_{ij}(f) = \frac{1}{2\pi \Delta n_j} \arctan \left(\frac{Q_i(f)}{Co_i(f)} \right), \quad i, j=1, 2, 3 \quad (6.7)$$

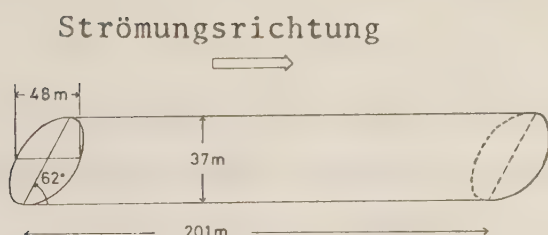
(PIELKE u. PANOFISKY (1970)), wobei $S_{ij} = 0$ eine senkrechte Stellung der Wirbel angibt.

Die Neigung ist für die v-Komponente etwa doppelt so groß wie für die u-Komponente, sie nimmt mit der Höhe ab (Aufsteilen) (PIELKE u. PANOFISKY (1970), SHARAN (1975)). Die Wirbelneigung gegen die z-Achse beträgt für u' und v' etwa $45-63^{\circ}$ (PANOFISKY u. SINGER (1965), SHIOTANI (1975)).

Aus Kohärenz- und Phasenspektren der Horizontalwindfluktuationen für Verschiebungen in allen drei Raumrichtungen (Δx_i zwischen 1.5 und 17 m) erhalten NAITO u. KONDO (1974) ein dreidimensionales Wirbelbild für eine Frequenz, das hier ohne Herleitung dargestellt werden soll.

Abb.6.25

Modell eines dreidimensionalen
Wirbels für $f = 1.6 \cdot 10^{-3}$ Hz,
 $z = 20$ m und $\bar{u} = 10$ m/s
nach NAITO u. KONDO (1974)



Die hier berechneten Kreuzspektren sollen nach anderen Gesichtspunkten ausgewertet werden. Denn die Angabe eines exponentiellen Zerfallsparameters erscheint zu formal, es liegt eine empirisch gefundene Gesetzmäßigkeit vor, die keine physikalische Deutung erfährt. Ferner ist in den Phasenspektren kein Anhaltspunkt für einen definierten Neigungswinkel erkennbar.

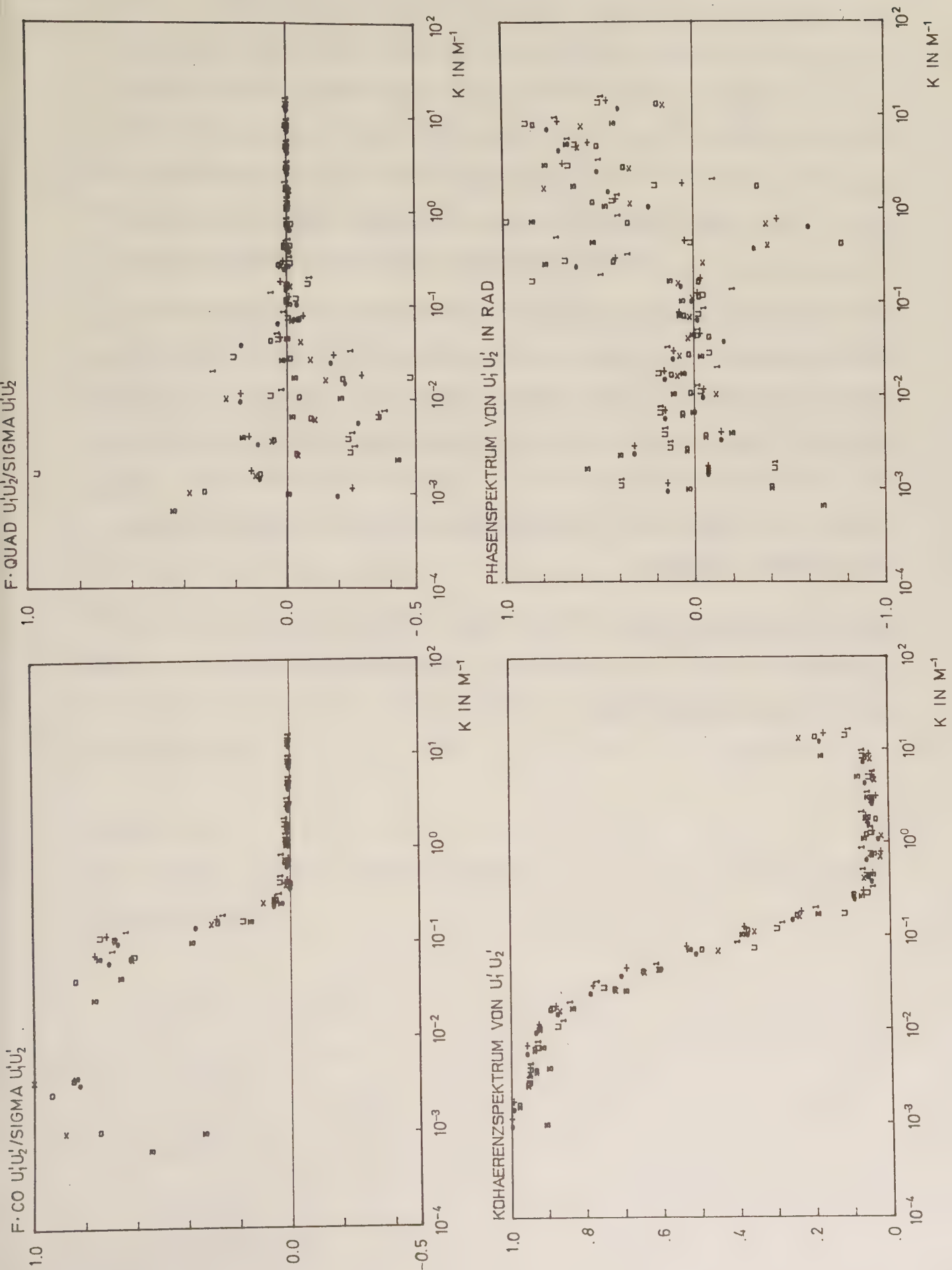
Abb. 6.26 zeigt am Beispiel der u-Komponente in 0.8 und 2.2 m Höhe die Struktur der berechneten Spektren.

Abb. 6.26, S.105

Co- und Quadraturespektrum (mit der Frequenz multipliziert und mit $\sigma_{u_1 u_2}$ normiert), sowie Kohärenz- und Phasenspektrum von u' in 0.8 und 2.2 m Höhe für Wellenzahlen K_1 .

Abb. 6.26

Text siehe Seite 104



Das Kohärenzspektrum weist eine deutliche Dreiteilung auf: für lange Wellen ist die Kohärenz nahezu 1, sie fällt dann bis zu Wellenlängen von etwa 5 m rasch ab und ist für sehr kleine Wellen Null (vgl. dazu Abb. 6.16 unten). Das bedeutet, daß die langen Wellen von u' in beiden Höhen - bis auf Phasenverschiebungen - simultan ausgeführt werden, während die Prozesse bei kleinen Wellen vollständig entkoppelt sind. Als charakteristische Länge kann man aus dem Kohärenzspektrum die Wellenlänge wählen, bei der $Coh = 0.5$ ist. Der nach der Davenport-Methode untersuchte Bereich liegt etwa zwischen 10^{-2} und 10^{-1} m^{-1} , also gerade im Bereich des Abfalls. Der Exponentialansatz gilt nach CHOI CHEONG CHUEN (1971) sogar nur für dimensionslose Frequenzen $n_i = \frac{f \Delta x_i}{u} < 0.1$, umfaßt also nur einen geringen Anteil des meßbaren Spektrums.

Das Phasenspektrum streut sehr stark; im Wellenzahlbereich von 0.04 bis 0.015 m^{-1} , das entspricht Wellenlängen von 25 bis 7.5 m, ist der Phasenunterschied im Mittel Null.

Das erkennt man auch am Co- und Quadraturspektrum, letzteres ist in diesem Bereich nämlich Null; sofern gleichphasige Anteile vorhanden sind, heben sie sich im Mittel auf. Verglichen mit Abb. 6.16 ist hier das Quadraturspektrum nicht mehr gegenüber dem Cospektrum zu vernachlässigen, das deutet auf eine Asymmetrie des Strömungsfeldes in der Vertikalen (vgl. 322.) und damit auf eine Ausrichtung der Wirbel hin.

YEFIMOV, PÖSOSHKOV und SIZOV (1975) erhalten für das Phasenspektrum der Horizontalkomponenten in verschiedenen Höhen ein Vorlaufen der Komponente in der größeren Höhe, das mit zunehmender Frequenz und zunehmendem Abstand Δz bis auf etwa 35° zunimmt.

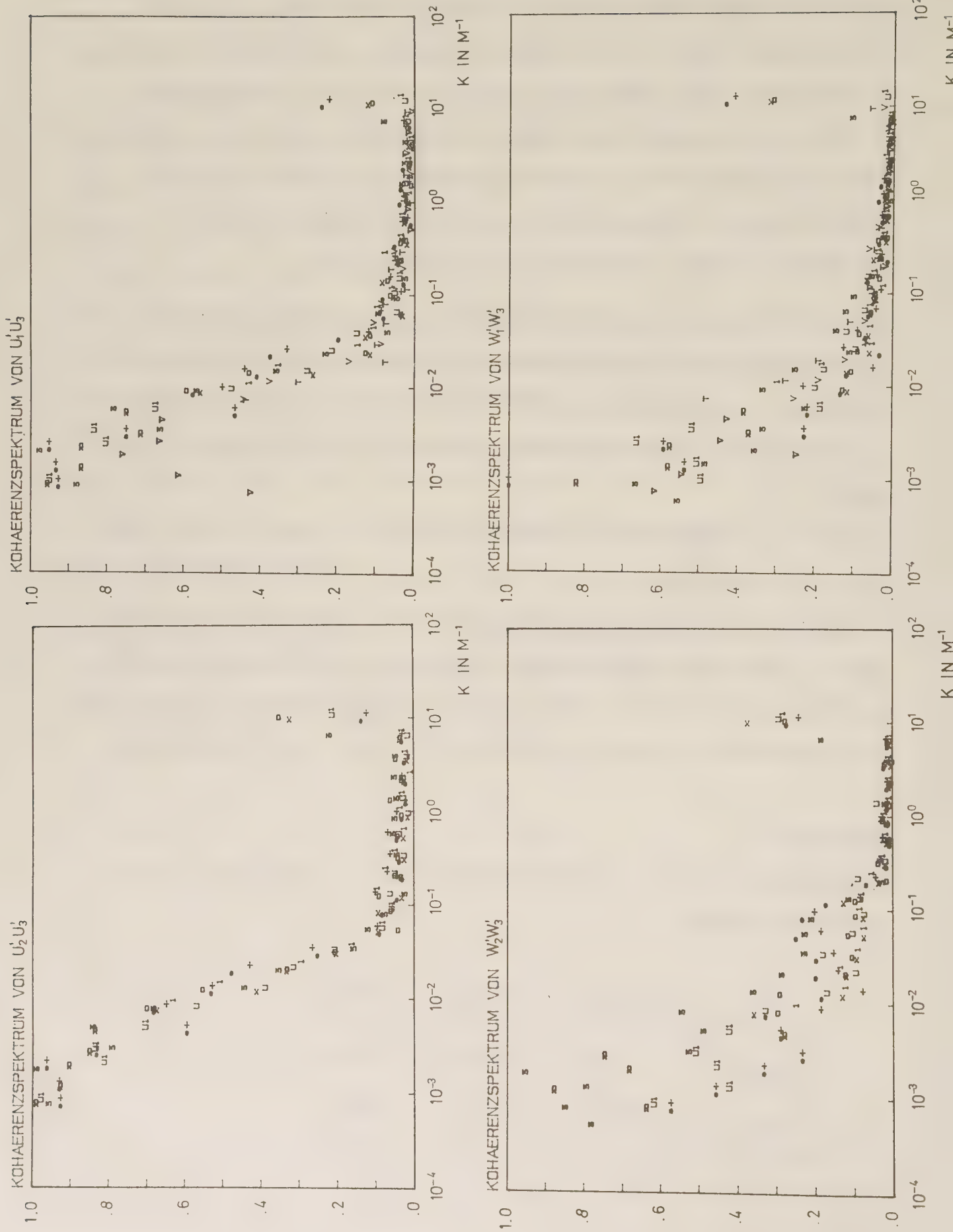
In Abb. 6.27 sind die Kohärenzspektren von u' und von w' in 2.2 und 7.0 m Höhe ($\Delta z=4.8\text{m}$) und in 0.8 und 7.0 m Höhe ($\Delta z=6.2\text{m}$) dargestellt. Die Vertikalkomponenten sind schwächer korreliert ($\text{Coh} < 1$) als die u-Komponenten; je größer der Abstand zwischen den Meßpunkten ist, bei umso kleineren Wellenzahlen sind die Prozesse entkoppelt ($\text{Coh} \approx 0$). Tabelle 6.6 zeigt die Längenskalen.

Tabelle 6.6

Längenskalen aus den Kohärenzspektren von u' und von w' in verschiedenen Höhen

$\Delta z =$	1.4 m	2.2 m	7.0 m
$\tilde{\Lambda}_{u'_1 u'_2}$	13 m	75 m	110 m
$\tilde{\Lambda}_{w'_1 w'_2}$	110 m	330 m	550 m

Abb. 6.27 Text siehe Seite 109



Schon bei Wellenlängen, die etwa das 10fache des Abstandes der Meßpunkte sind, besteht zwischen den Windkomponenten keine Kopplung mehr. Das deutet auf eine sehr große horizontale Erstreckung der Wirbel mit schwacher vertikaler Korrelation hin. Quantitative Angaben über die Höhenabhängigkeit der Längenskalen kann man nicht machen.

Die gleiche Struktur der Kohärenzspektren findet man auch bei YEFIMOV, POSOSHKOV u. SIZOV (1975), die für die horizontale Windkomponente das Quadrat des Kohärenzspektrums berechnet haben. Die Längenskala, die man aus der Frequenz bei $\text{Coh}^2 = 0.25$ mit einem angenommenen Wert von $\bar{u} = 2 \text{ m/s}$ für $\Delta z = 3 \text{ m}$ erhält ($z_1 = 3 \text{ m}$, $z_2 = 6 \text{ m}$) ist mit $\tilde{\lambda}_u = 290 \text{ m}$ jedoch größer als die Werte von Tabelle 6.6. Der Arbeit von VOLKOV, KOPROV u. KRAVCHENKO (1975), die ein normiertes Cospektrum für w' berechnet haben, kann man für $\Delta z = 4 \text{ m}$ ($z_1 = 2 \text{ m}$, $z_2 = 6 \text{ m}$) eine Frequenz für $\text{Co}_{w_1 w_2} / (\phi_{w_1} \phi_{w_2})^{\frac{1}{2}} = 0.5$ von 0.02 Hz entnehmen, was mit $\bar{u} = 2.5 \text{ m/s}$ zu $\tilde{\lambda}_{w_1 w_2} = 125 \text{ m}$ führt.

662. Kreuzspektren von u' und w' in verschiedenen Höhen

Kreuzspektren der Longitudinal- und Vertikalkomponente, die in verschiedenen Höhen gemessen wurden, findet man in der Arbeit von DANNECKER (1973), der Turmmessungen verwendet.

Abb. 6.27, S. 108

Kohärenzspektren von u' und w' in 2.2 und 7.0 m Höhe (links) und in 0.8 und 7.0 m Höhe (rechts) gegen die Wellenzahl κ_1 .

Er klassifiziert seine Ergebnisse nach dem Vorzeichen des Co- und Quadraturespektrums. Die Kombination $w'(80 \text{ m}) - u'(48 \text{ m})$ hat für alle Wellenlängen eine negative Phasenbeziehung mit negativem Cospektrum (d.h. w'_{oben} läuft u'_{unten} voraus), die Kombination $u'(80 \text{ m}) - w'(48 \text{ m})$ hat für lange Wellen eine positive Phase und ein positives Cospektrum (u'_{oben} läuft w'_{unten} voraus).

Bei den für die Meppener Daten vorkommenden geringen Verschiebungen ergeben sich unsystematisch schwankende Phasen, bedingt durch um den Nullpunkt schwankende Quadraturespektren. Lediglich für das Phasenspektrum von $u'(0.8 \text{ m})$ und $w'(7.0 \text{ m})$ ist bei Wellenlängen von 0.1 bis 0.5 m Gleichphasigkeit zu erkennen, also ein deutlicher struktureller Zusammenhang (vgl. dazu auch Abb. 6.16).

In Abb. 6.28 sind die Kohärenzspektren für $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(0.8 \text{ m})$ sowie für $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(7.0 \text{ m})$ dargestellt. Die Korrelation zwischen u' und w' ist i.a. schwächer als für u' allein; sie nimmt von etwa 0.8-0.9 bei kleinen Wellenzahlen rasch auf Null ab, das bedeutet, daß beide Prozesse ab einer bestimmten Wellenzahl entkoppelt sind. Die Längenskalen sind in Tabelle 6.7 zusammengefaßt.

Tabelle 6.7

Längenskalen aus den Kohärenzspektren von u' und w' in verschiedenen Höhen

$\Delta z =$	1.4 m	4.8 m	6.2 m
$\Lambda_{u_1 w_2}$	(20-350 m)	250 m	350 m
$\Lambda_{u_2 w_1}$	30 m	100 m	200 m

(Die Angaben sind größenordnungsmäßig, die Streuung der Einzelwerte z.T. groß.)

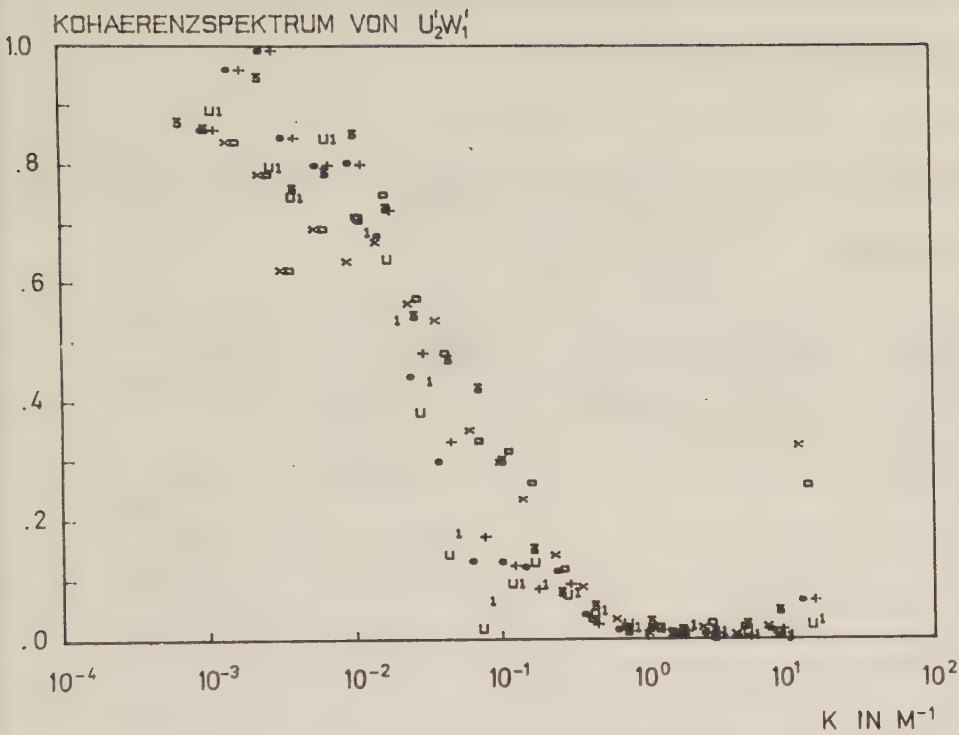


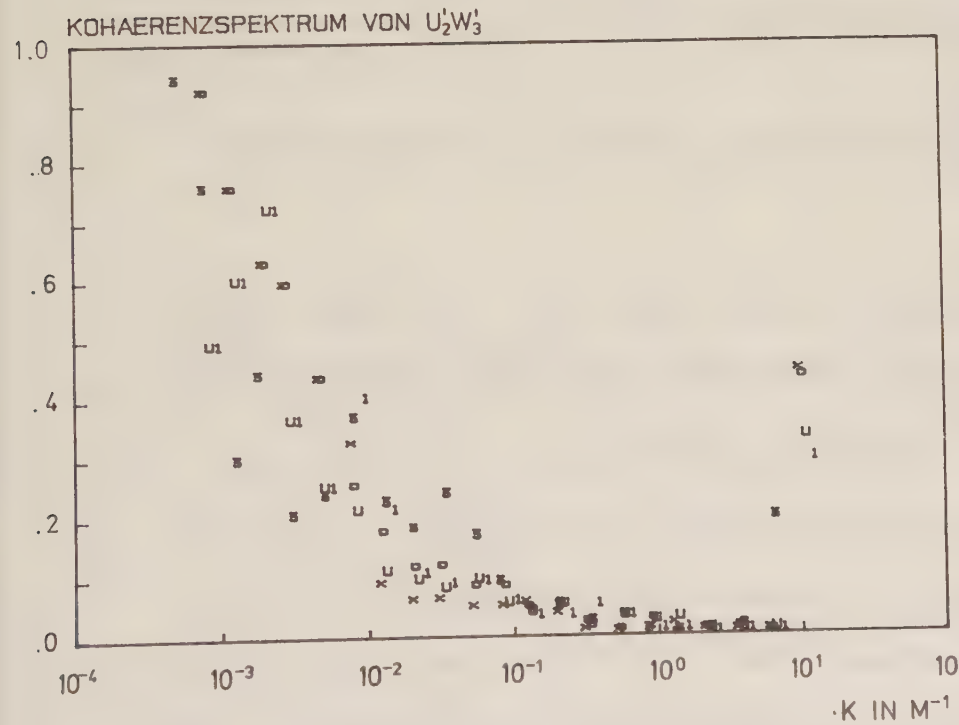
Abb. 6.28

Kohärenzspektren von u' (2.2 m) und w' (0.8 m) (oben) und u' (2.2 m) und w' (7.0 m) (unten) gegen die Wellenzahl K_1 .

Sie betragen ein Vielfaches des Meßpunkteabstandes und nehmen mit der Größe des Abstandes und offenbar auch mit der Höhe zu.

Man kann diese Längenskalen deuten als die longitudinale Erstreckung eines Wirbels,

für den bei den hier untersuchten



vertikalen Abständen noch eine Korrelation besteht. Auch die Gebilde, in denen eine Korrelation zwischen u' und w' besteht, sind also sehr flach und in Strömungsrichtung stark gestreckt.

Die Struktur der Kohärenzspektren unterstreicht die Bedeutung großer Wirbel für den Impulstransport.

67. Kreuzkorrelationsfunktionen von Geschwindigkeitskomponenten in verschiedenen Höhen

Eindeutigere und leichter interpretierbare Ergebnisse als die Kreuzspektren liefern die Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen den Windkomponenten, die in festen vertikalen Abständen gemessen wurden. Diese Kurven haben, wie in 321. erwähnt, ihr Maximum nicht bei einer Verschiebung $\Delta x = 0$, sodaß die Berechnung von Integral-, Semi- und Mikroskala nicht sinnvoll ist; vielmehr wird man die Verschiebung, bei der die Korrelation ihr Maximum hat, als charakteristische Länge wählen.

671. Kreuzkorrelationsfunktionen gleicher Geschwindigkeitskomponenten

Es gibt einige Turbulenzmessungen an Türmen, aus denen Kreuzkorrelationen der Windfluktuationen mit festem vertikalen oder horizontalen Abstand berechnet wurden.

Eine der ersten Untersuchungen dieser Art stammt von DEACON (1955), der an einem 153 m hohen Mast die Turbulenzstruktur in Starkwindlagen untersucht hat. Er findet, daß Böen zuerst in den größeren Höhen (153 und 64 m) und 2.5 s später in 12 m auftreten. Die Vorwärtsneigung von großen Turbulenzelementen hat sich in allen späteren Untersuchungen bestätigt. SHIOTANI (1975) entwirft aus Korrelationsrechnungen der longitudinalen Windkomponente an einem 110 m hohen Turm ein zweidimensionales

Bild für die x-z-Ebene (Abb. 6.29 und 6.30). Er erhält mit zu-

nehmender Höhe zu-
nehmende Korrela-
tionskoeffizienten
zwischen den u' in
einem festen Abstand
 Δz , was auf eine Ver-
größerung der Turbu-
lenzskala mit der Hö-
he hinweist. Die Zeit-
verschiebung, bei der
das Maximum liegt,
ist in niedrigen Hö-
hen am größten, was
ein Aufrichten mit der
Höhe andeutet.

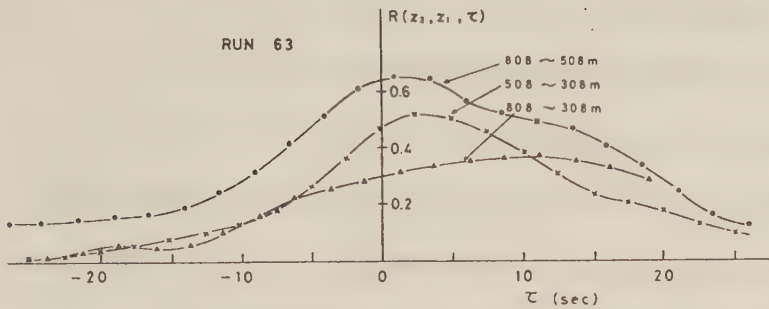


Abb. 6.29

Kreuzkorrelationsfunktionen von Longitudinalwindkomponenten in verschiedenen Höhen in Abhängigkeit von der Zeitverschiebung τ für einen Run.

nach SHIOTANI (1975)

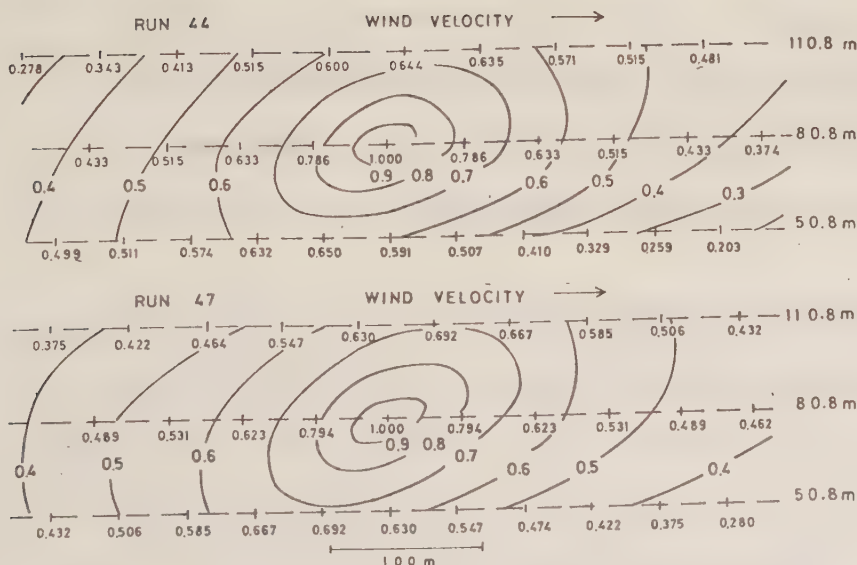


Abb. 6.30

Isolinien von Korrelationswerten der Longitudinalwindkomponenten in einer vertikalen Ebene parallel zur Strömungsrichtung

(beachte: horizontale Skala = $\frac{1}{2}$ ver-

tikale Skala) nach SHIOTANI (1975)

Auch konvektive Elemente haben eine leichte Vorwärtsneigung, wie KAIMAL und HAUGEN (1967) für die Vertikalkomponente zeigen. (Turmmessungen bis 430 m). DANNECKER (1973) erhält aus der Korrelation von u' in 80 und 48 m Höhe einen Neigungswinkel von etwa 70° (gegen den Erdboden). Ein Bild von der Korrelation in der x-y-Ebene gewinnen SHIOTANI und IWATANI (1976) aus Messungen an 5 Türmen in 40 m Höhe, die in einer Linie bei 0, 12, 35, 80 und 190 m stehen. Die Isolinien der Korrelation bilden Ellipsen, die in Strömungsrichtung gestreckt sind und eine geringe Neigung gegen diese haben.

Auch für die geringen Höhen, in denen die für diese Arbeit verwendeten Meßwerte gewonnen wurden, findet man eine Vorwärtsneigung der vorherrschenden großen Wirbel. Abb. 6.31 und 6.32 zeigen die Kreuzkorrelationen von u' (0.8 m) und u' (2.2 m), u' (0.8 m) und u' (7.0 m) bzw. von w' (0.8 m) und w' (2.2 m), w' (0.8 m) und w' (7.0 m).

Die Kurven zeigen einen typischen Verlauf: für kleine Verschiebungen - positive und negative - ist die Korrelation nahezu 1 und fällt dann sehr rasch auf Null ab. Die Kovarianzfunktion ist mit ihrem Wert an der Stelle $r = 0$ normiert, daher kann bei ansteigender Kovarianz die Korrelationsfunktion >1 werden.

Als charakteristische Länge entnimmt man den Kreuzkorrelationsfunktionen diejenige Verschiebung $\mathcal{L}$, bei der die Korrelation maximal ist (vgl. S.38). Das Aussehen der Kurven legt hier allerdings nahe, für positive und negative Verschiebungen je eine charakteristische Länge $\mathcal{L}^+$ und $\mathcal{L}^-$ anzugeben.

In Tabelle 6.8 sind die Korrelationskoeffizienten für die Geschwindigkeitsfluktuationen in verschiedenen Höhen eingetragen.

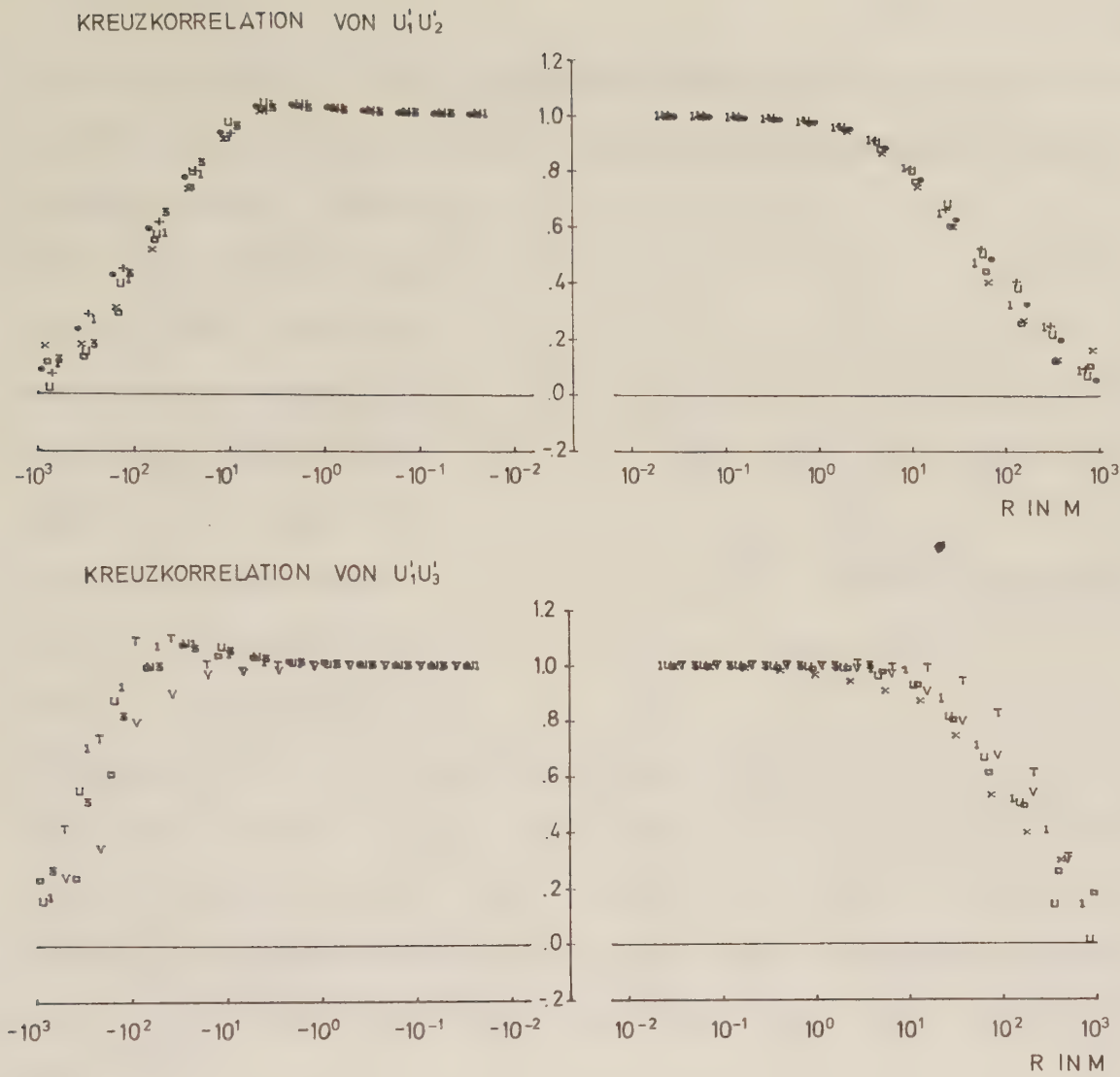
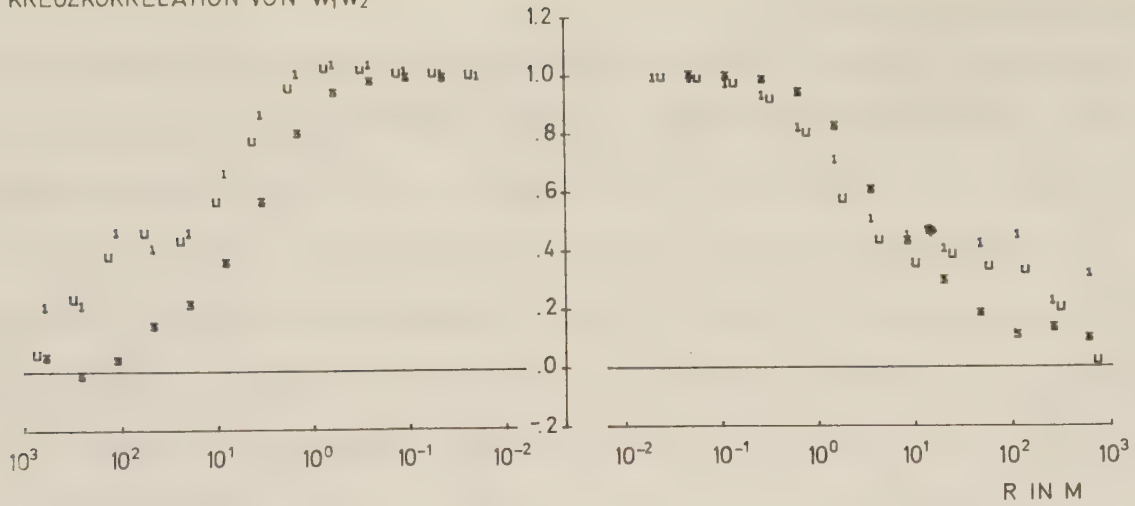


Abb. 6.31
Kreuzkorrelationsfunktionen $C_{u_1 u_2}(r_1, \Delta z) / \sigma_{u_1 u_2}$ von $u'(0.8 \text{ m})$ und $u'(2.2 \text{ m})$ (oben) und $u'(0.8 \text{ m})$ und $u'(7.0 \text{ m})$ (unten) gegen die Verschiebung r in x -Richtung

Tabelle 6.8
Korrelationskoeffizienten der Windkomponenten in verschiedenen Höhen

Δz	$u'_1 u'_2$	$v'_1 v'_2$	$w'_1 w'_2$	$u'_1 w'_2$	$u'_2 w'_1$
1.4 m	0.67	0.34	0.10	-0.28	-0.28
4.8 m	0.51	0.61	-	-0.16	-
6.2 m	0.38	0.36	0.07	-0.10	-0.14

KREUZKORRELATION VON $w_1'w_2'$



KREUZKORRELATION VON $w_1'w_3'$

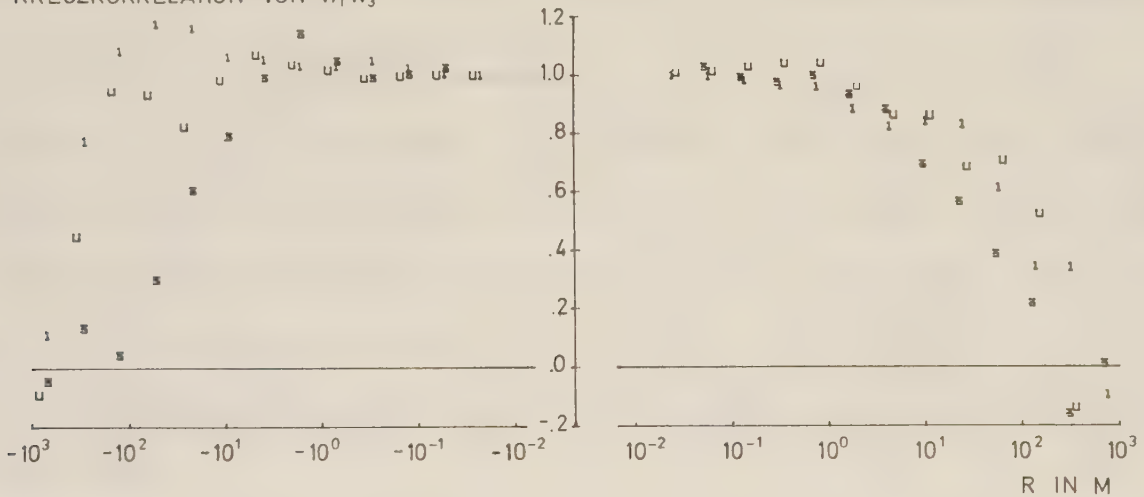


Abb. 6.32

Kreuzkorrelationsfunktionen $C_{w_1w_2}(r_1, \Delta z) / \overline{w_1w_2}$ von $w'(0.8 \text{ m})$ und $w'(2.2 \text{ m})$ (oben) und $w'(0.8 \text{ m})$ und $w'(7.0 \text{ m})$ (unten) gegen die Verschiebung r in x -Richtung.

Das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktionen, das teilweise nur schwach ausgeprägt ist, liegt bei solchen Verschiebungen $\mathcal{L}_i^-$, bei denen die Schwankungen u_i' in der größeren Höhe denen in der niedrigeren Höhe vorausseilen (hier: negative Verschiebungen). Je größer der Abstand zwischen den beiden Höhen ist, bei umso größeren Verschiebungen liegt das Maximum. $\mathcal{L}^-$ ist für die u -Kom-

ponente größer als für die w-Komponente. Die Koppelung zwischen den Windkomponenten ist über ein bestimmtes Gebiet $[\mathcal{L}_i^+, \mathcal{L}_i^-]$ gleichbleibend "gut" (je nach Korrelationskoeffizient); aber "nach vorn" besteht die Korrelation über einen größeren Bereich $\mathcal{L}_i^-$ als "nach hinten" ($\mathcal{L}_i^+$). Man kann aus den Längenskalen $\mathcal{L}_i^-$ und $\mathcal{L}_i^+$, die das Korrelationsgebiet in x-Richtung bezeichnen - für $\mathcal{L}_i^-$ ist die Korrelation sogar maximal - und aus dem vertikalen Abstand der Meßpunkte zwei Neigungswinkel α und β berechnen, wobei α die Vorwärtsneigung des Korrelationsgebietes und β die Rückwärtsneigung angibt. In Tabelle 6.9 sind die Längenskalen $\mathcal{L}_i$ und die Winkel aufgeführt.

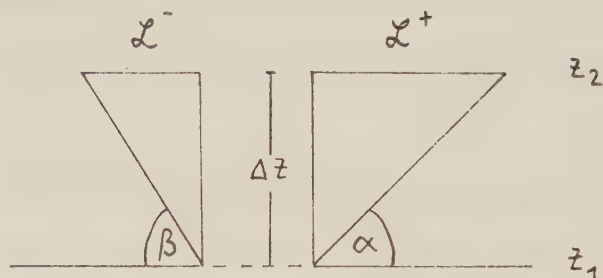


Tabelle 6.9

Längenskalen $\mathcal{L}_i^-$ und $\mathcal{L}_i^+$ sowie Neigungswinkel $\alpha = \arctan(\frac{\Delta z}{\mathcal{L}_i^+})$ und $\beta = \arctan(\frac{\Delta z}{\mathcal{L}_i^-})$ aus den Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w' in verschiedenen Höhen, $i=1,3$

	$\mathcal{L}_i^-$	$\mathcal{L}_i^+$	α	β
$u' (0.8\text{m}) \ u' (2.2\text{m})$	-6 m	1.5 m	13°	43°
$u' (0.8\text{m}) \ u' (7.0\text{m})$	-60 m	10 m	6.6°	32°
$u' (2.2\text{m}) \ u' (7.0\text{m})$	-20 m	8 m	13.5°	31°
$w' (0.8\text{m}) \ w' (2.2\text{m})$	-0.9 m	0.3 m	57°	78°
$w' (0.8\text{m}) \ w' (7.0\text{m})$	-3 m	1 m	31°	81°
$w' (2.2\text{m}) \ w' (7.0\text{m})$	-4 m	1 m	39°	78°

Die Neigungswinkel sind für die Longitudinalkomponenten sehr klein, es handelt sich also um flache, gestreckte Wirbel. Die Kopplung zwischen den Vertikalkomponenten ist auf wesentlich kleinere Gebiete beschränkt und ist relativ schwach (kleiner Korrelationskoeffizient). Es besteht die Tendenz für ein Aufrichten der Wirbel mit der Höhe.

672. Kreuzkorrelationsfunktionen von u' und w' in verschiedenen Höhen

Während die Kreuzkorrelation gleicher Geschwindigkeitskomponenten beschreibt, wie bspw. die Longitudinalwindschwankungen räumlich zusammenhängen, also Aussagen über energieenthaltende Wirbel macht, liefern Kreuzkorrelationen von u' und w' in verschiedenen Höhen ein räumliches Bild von den Strukturen, die den Impulstransport bewerkstelligen. Das Bild, das dem Schmidt'schen Austauschmodell zugrundeliegt (vgl. etwa PRANDTL (1944), S. 105ff, ROTTA (1972), S. 171), daß "Flüssigkeitsballen" sich nach oben und unten bewegen und dort Horizontalimpuls austauschen, erscheint zu konstruiert und physikalisch wenig einsichtig. Der Impulstransport ist nicht als isoliertes Phänomen an einer Stelle zu betrachten sondern im Zusammenhang mit der ganzen Strömung und ihrer räumlichen und zeitlichen Verteilung. Die Kreuzkorrelation von u' und w' an einem Meßpunkt lieferte bereits Aussagen über die Ausmaße (in x-Richtung und andeutungsweise in z-Richtung) der vorherrschenden Wirbel, aus der Kreuzkorrelation von u' und w' , die an verschiedenen Orten gemessen wurden, gewinnt man ein Bild von deren Lage im Raum.

Beispielhaft für die berechneten Kreuzkorrelationskurven mit Verschiebungen $\Delta x = r$ in x-Richtung sind in Abb. 6.33 die von $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(0.8 \text{ m})$ und von $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(7.0 \text{ m})$ dargestellt.

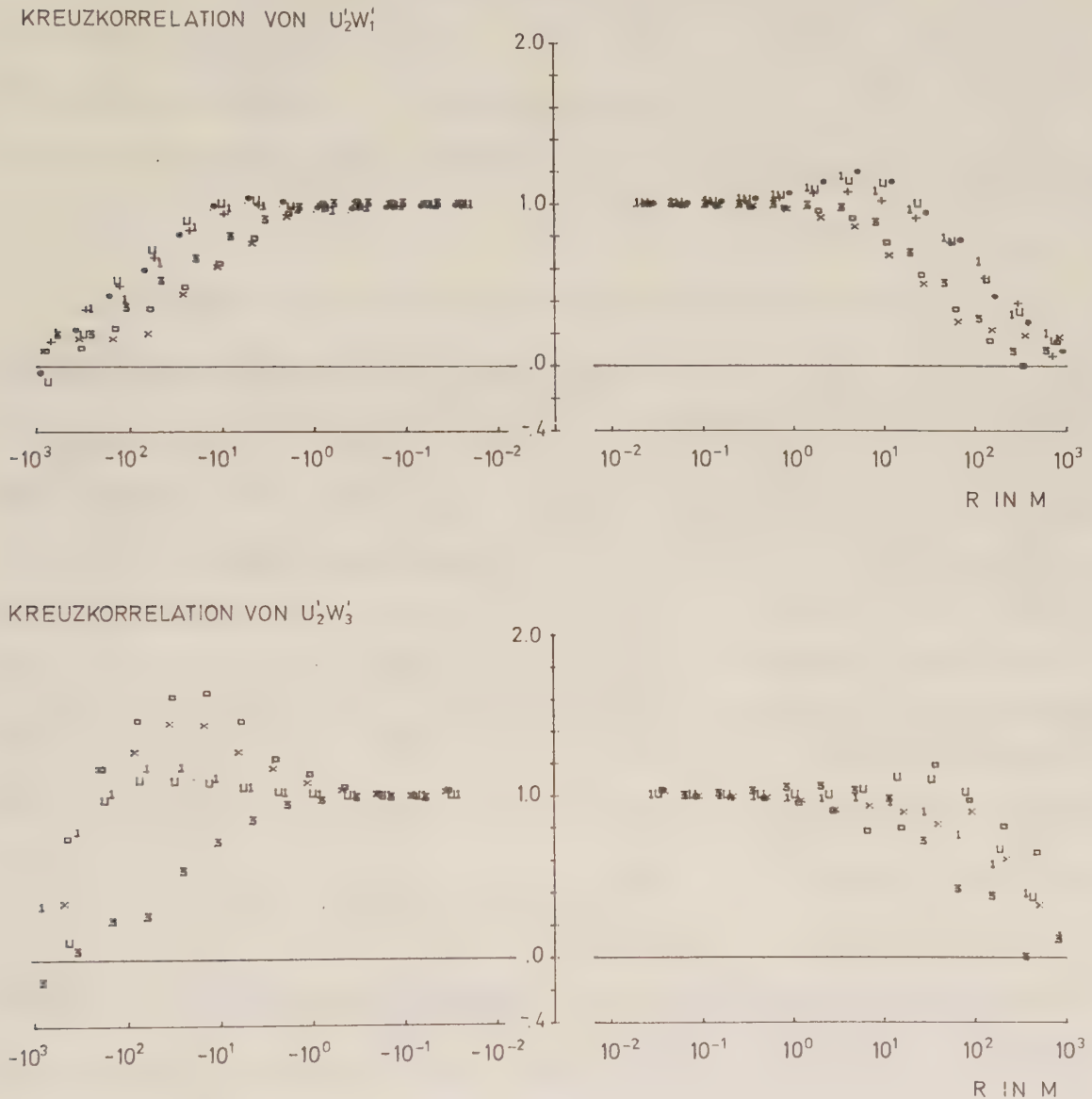


Abb. 6.33

Kreuzkorrelationsfunktionen $C_{u_i w_j}(r_1, \Delta z) / \sigma_{u_i w_j}$ von $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(0.8 \text{ m})$ (oben) und $u'(2.2 \text{ m})$ und $w'(7.0 \text{ m})$ (unten) gegen die Verschiebung r in x-Richtung.

Für positive Verschiebungen $\Delta x < \underline{\mathcal{L}_{13}^+}$ und negative $\Delta x > \underline{\mathcal{L}_{13}^-}$ ist die Korrelation ≥ 1 und fällt dann rasch auf Null ab. Auch hier erreicht die Kurve ein Maximum bei solchen Verschiebungen, bei denen die Schwankungen in der größeren Höhe vorlaufen.

In Tabelle 6.10 sind die Längenskalen $\mathcal{L}_{13}^-$ und $\mathcal{L}_{13}^+$ und die zugehörigen Winkel α und β angegeben, wobei die Längenskala des Maximums und der entsprechende Winkel (= Winkel der Vorwärtsneigung) unterstrichen sind. Die Einzelwerte schwanken z.T. sehr stark.

Tabelle 6.10

Längenskalen $\mathcal{L}_{13}^-$ und $\mathcal{L}_{13}^+$ (Längenskala des Maximums unterstrichen) sowie Neigungswinkel $\alpha = \arctan(\frac{\Delta z}{\underline{\mathcal{L}_{13}^-}})$ und $\beta = \arctan(\frac{\Delta z}{\underline{\mathcal{L}_{13}^+}})$ (Winkel der Vorwärtsneigung unterstrichen) aus den Kreuzkorrelationsfunktionen von u und w in verschiedenen Höhen

	$\mathcal{L}_{13}^-$	$\mathcal{L}_{13}^+$	α	β
u' (0.8m) w' (2.2m)	<u>-6 m</u>	20 m	<u>13°</u>	4°
u' (0.8m) w' (7.0m)	<u>-50 m</u>	15 m	<u>7°</u>	22°
u' (2.2m) w' (0.8m)	-8 m	<u>8 m</u>	10°	<u>10°</u>
u' (2.2m) w' (7.0m)	<u>-50 m</u>	20 m	<u>5°</u>	13°
u' (7.0m) w' (0.8m)	-15 m (-8m)	<u>40m (10m)</u>	22° (38°)	<u>32° (9°)</u> +)
u' (7.0m) w' (2.2m)	-20 m	<u>40 m</u>	13°	<u>7°</u>

+) Hier traten bei einigen Runs deutlich abweichende Maxima auf.

Die Korrelationskoeffizienten sind in Tabelle 6.8 (S.) angegeben.

Die Gebiete, über die eine Korrelation zwischen u' in einer und w' in einer anderen Höhe besteht, sind ähnlich groß wie die, über

die die Longitudinalkomponenten gekoppelt sind, jedoch die Korrelation ist wesentlich geringer. Die Neigungswinkel sind klein und für $u'_{\text{unten}} - w'_{\text{oben}}$ und $u'_{\text{oben}} - w'_{\text{unten}}$ etwa gleich. Vor allem für Korrelationen der Art $u'_{\text{unten}} - w'_{\text{oben}}$ liegt der Maximalwert der Korrelationsfunktion wesentlich über 1 (bis 1.8), das ergibt für u' (0.8 m) und u' (2.2 m, 6 m voraus) einen Korrelationskoeffizienten von nahezu -0.5; zwischen diesen Fluktuationen besteht also ein strengerer Zusammenhang als zwischen den Fluktuationen von u' und w' am selben Ort ($r_{uw}(0.8 \text{ m}) = -0.33$).

DANNECKER (1973) hat die Kreuzkorrelation von u' und w' für größere Höhen (48 und 80 m) untersucht. Er erhält aber nur im Fall $u'_{80} - w'_{48}$ ein Vorseilen der Schwankungen in der größeren Höhe (leider ohne Angabe der Verschiebung, bei der die Korrelationsfunktion maximal wird) und ein zweites Maximum bei negativen Verschiebungen (u'_{80} hinter w'_{48}). Die Längenskalen liegen etwa im 10 m-Bereich, was auf recht steile Wirbel schließen läßt und ein Hinweis auf das Aufrichten der Wirbel mit der Höhe ist.

7. Interpretation der Meßergebnisse

Aus dem vorangegangenen Kapitel wird deutlich, daß es zur Untersuchung der großskaligen Struktur der atmosphärischen Turbulenz zwar eine ganze Reihe von Einzeluntersuchungen gibt, daß aber ein Gesamtbild fehlt. Jede statistische Funktion liefert einen speziellen Beitrag dazu; die Modellvorstellung, die man daraus gewinnt, erklärt aber zumeist auch nur diesen einen Sachverhalt. So erhält WIPPERMANN (1968) nur aus Überlegungen über die Häufigkeitsverteilungen von u' und w' und die

Vorzeichen des vertikalen Impuls- und Energietransports ein zweidimensionales Wirbelbild, DANNECKER (1973) entwirft aus gemessenen Kreuzspektren der Windkomponenten in zwei Höhen ein Wirbelbild für den Impulstransport, TENNEKES und LUMLEY (1974) sogar allein aus der Forderung, daß die Wirbel aus der mittleren Strömung Energie aufnehmen müssen; NAITO und KONDO (1974) schließlich konstruieren aus dem gemessenen Kohärenzspektrum für eine bestimmte Frequenz einen Wirbel (s. Abb. 6.25).

Die so gewonnenen Modellvorstellungen sind i.a. recht einfach, da sie nur aus zwei oder drei Parametern entworfen sind.

In dieser Arbeit wurden aber nun Parameter der verschiedensten statistischen Funktionen berechnet, aus denen sich nicht auf Anhieb ein eindeutiges Wirbelmodell konstruieren läßt. Es muß daher sorgfältig unterschieden werden, welchen Teilaspekt der turbulenten Strömung jede Funktion beschreibt, um die Ergebnisse richtig einordnen zu können. Die Untersuchung der statistischen Zusammenhänge einmal gleicher (z.B. R_{11} , Co_{33} ...) und zum anderen unterschiedlicher Geschwindigkeitsfluktuationen (z.B. R_{13} , Co_{13} ...) legt nahe, zunächst zwischen energieenthaltenden und impulstransportierenden Wirbeln zu unterscheiden. Offensichtlich sind letztere auch die Wirbel, die der mittleren Strömung Energie entziehen können durch die Korrelation von u' und w' . Die Wirbel, die die meiste Energie - bzw. Varianz - enthalten, können kleiner sein, sie haben für die drei Windkomponenten unterschiedliche Größe.

In Tabelle 7.1 sind noch einmal die wesentlichen Parameter (Längenskalen und Neigungswinkel), die in 6. gewonnen wurden,

Tabelle 7.1

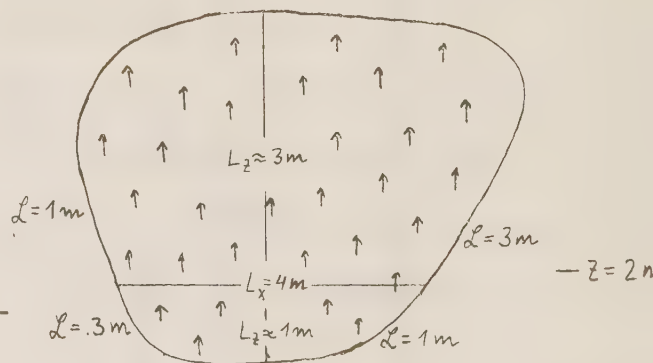
Zusammenfassung der in 6. berechneten Längenskalen und Neigungswinkel

	u_1'	u_2'	u_3'	v_1'	v_2'	v_3'	w_1'	w_2'	w_3'	$u_1'w_1'$	$u_2'w_2'$	$u_3'w_3'$
Max.im Spektrum $\wedge$	80m	150m	250m	30m	50m	125m	1.3m	3.3m	4m	100m	100m	-
Integralskala L	25m	40m	56m	35m	40m	67m	8m	16m	17m	30m	76m	200m
Semiskala $\sim L$	6m	14m	24m	3m	-	-	.3m	.9m	1m	8-20m	40-100m	10-100m
	$u_1'u_2'$	$u_1'u_3'$	$u_2'u_3'$	$w_1'w_2'$	$w_1'w_3'$	$w_2'w_3'$	$u_1'w_2'$	$u_1'w_3'$	$u_2'w_1'$	$u_2'w_3'$	$u_3'w_1'$	$u_3'w_2'$
Coh = 0.5 $\sim \wedge$	13m	75m	110m	110m	330m	550m	-	350m	30m	250m	200m	100m
Maximale Korr.	6m	60m	20m	0.9m	3m	4m	6m	50m	8m	50m	40(10)m	40m
Neigungswinkel	13°	6°	13°	57°	64°	50°	13°	7°	10°	5°	9(32)°	7°
maximale Korr.	1.5m	10m	8m	0.3m	1m	1m	20m	15m	8m	20m	15(8)m	20m
Neigungswinkel	43°	32°	31°	78°	81°	78°	4°	22°	10°	13°	22(38)°	13°

zusammengefaßt. Es soll nun der Versuch gemacht werden, unter Verwendung dieser Parameter und der weiteren in 6. gewonnenen Erkenntnisse ein Bild von den großen Strukturen zu entwerfen. Dabei sind die aus den Kohärenzspektren gewonnenen Längenskalen weniger aussagekräftig, da sie lediglich andeuten, daß nur sehr große Wirbel auch in der Vertikalen eine Koppelung haben.

Die vertikalen Windschwankungen sind in Strömungsrichtung über kleine Bereiche miteinander gekoppelt; die charakteristische Länge liegt in der Größenordnung der Meßhöhe, wenn man Integral- und Semiskala zu einer Längenskala kombiniert. Die Korrelation in vertikaler Richtung ist sehr gering, mit w' in größeren Höhen besser als mit w' in niedrigeren. Diese Wirbel erstrecken sich nicht über die ganze Grenzschicht. Die Zunahme der charakteristischen Länge mit der Höhe ist nicht sehr groß, es handelt sich um nahezu "runde" Wirbel. Da die charakteristische Länge in Strömungsrichtung in etwa mit der Maximumwellenlänge im Energiespektrum übereinstimmt, kann man annehmen, daß die Wirbel dicht aufeinander folgen (Größe = Wellenlänge) (vgl. Diskussion S.39). In der nebenstehenden Skizze

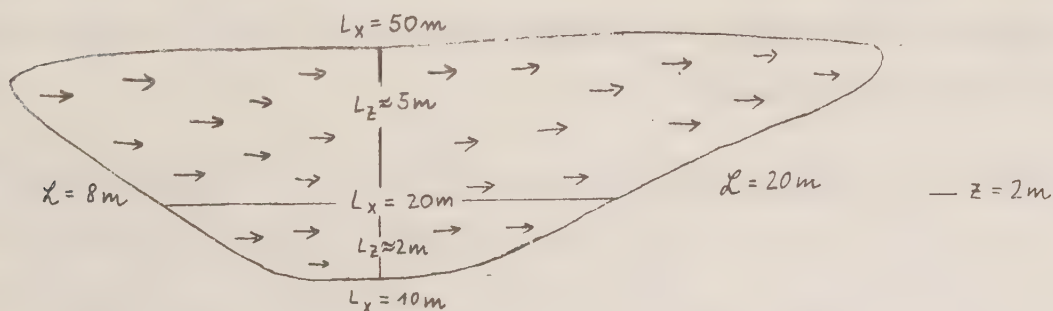
ist aus den berechneten Längenmaßstäben ein die vertikale Windvarianz enthaltendes einheitliches Gebilde konstruiert. Dabei wurden verwendet: Integral- und Semiskala in den drei Höhen, das ungefähre vertikale Korrelationsgebiet (aus Abb.6.21) von 2.2 m "nach unten" und "nach oben", die Vorwärts- und Rückwärtsneigung



von 0.8 auf 2.2 m und von 2.2 auf 7.0 m.

Die lateralen Windschwankungen, die über ein wesentlich größeres Gebiet gekoppelt sind, folgen ebenfalls dicht aufeinander; sowohl das Energiespektrum als auch die Autokorrelationsfunktion weisen aber deutlich Anteile sehr großer Strukturen auf.

Die Strukturen, die von den longitudinalen Windschwankungen gebildet werden, sind sehr groß; die mittlere Wirbelgröße ist mit 20-40 m (für 2 m Höhe) etwa so groß wie die von v' , jedoch liegt das Maximum im Energiespektrum bei ungefähr 4-6 mal so großen Wellenlängen. Das kann einmal bedeuten, daß diese Wirbel nicht dicht liegen sondern sporadisch alle 50 bis 500 m auftreten (breites Maximum im Spektrum), es kann aber auch ein Hinweis auf sehr große Strukturen sein. Die deutliche Zunahme der charakteristischen Länge mit der Höhe bedeutet einmal eine starke Vergrößerung der Wirbel mit der Höhe, andererseits aber auch ein selteneres Auftreten, nicht alle Wirbel reichen bis in größere Höhen. Die Korrelationsgebiete von u' sind sehr stark in Strömungsrichtung gestreckt und weisen eine deutlich anisotrope Struktur auf; sie sind nach vorne geneigt mit einem sehr flachen Neigungswinkel.



Die Skizze stellt ein aus den Längenmaßstäben konstruiertes, longitudinale Windvarianz enthaltendes Gebilde dar. Auch hier wurden die aus Integral- und Semiskala gebildete Längenskala in den 3 Höhen, die ungefähre Größe des Korrelationsgebietes in der Vertikalen aus Abb.6.21 und die Neigungswinkel zwischen den drei Höhen zur Konstruktion verwendet.

Durch das Zusammenwirken von u' und w' ergeben sich Gebilde, die Horizontalimpuls nach unten transportieren und in der Lage sind, der mittleren Strömung Energie zu entziehen. Wie man den Korrelationskoeffizienten (s.Tabellen 6.2 und 6.8) und dem Verlauf der statistischen Funktionen entnehmen kann, handelt es sich nicht um stark ausgeprägte Strukturen; auch die sehr großen charakteristischen Längen zeigen das. Sie sind von ähnlicher Größenordnung wie die u' -Wirbel mit einer mäßigen vertikalen Erstreckung und einer deutlichen Vorwärtsneigung. Die Wirbel liegen nicht dicht. Sehr große Gebilde von 100 m Erstreckung kommen ebenfalls vor, wie das Cospektrum und die Kreuzkorrelationsfunktion zeigen. Kleine Wirbel spielen praktisch keine Rolle. Da die Vertikalkomponente eher kleinskalige Strukturen aufweist, kann ein solches impulstransportierendes Gebilde nicht einheitlich strukturiert sein. Man kann allerdings keine Aussagen darüber machen, ob sich diese Wirbel von denen unterscheiden, die die longitudinale Windvarianz enthalten, denn die charakteristischen Längen stimmen gut überein.

Die Analyse von Sekundenmittelwerten von $u'w'$, die größer oder kleiner als Null oder ein bestimmter Schwellenwert (hier: u_*^2) sind, liefert folgendes Bild (vgl. 622.): in 34% aller Fälle

ist der Sekundenmittelwert von $u'w'$ kleiner als $-u_*^2$ und bleibt es im Mittel 3.5 s (oder 15 m). Diese Fälle tragen nahezu 100% zum Impulstransport bei; die Beiträge der $u'w'$, die negativ, aber betragsmäßig kleiner als u_*^2 sind (Häufigkeit 42%) heben sich mit denen der $u'w'$, die größer als Null sind (Häufigkeit 24%), etwa auf. Mit diesem Bild stimmt sehr schön die einfachste Vorstellung von den impulstransportierenden Wirbeln überein, die sich allein aus dem Korrelationskoeffizienten zwischen u' und w' von -0.33 ergibt, daß nämlich ein Drittel des Raumes mit Wirbeln einer strengen negativen Korrelation von u' und w' erfüllt ist und zwei Drittel mit unkorrelierten Gebilden ohne Beitrag zum Impulstransport.

Die oben erwähnte Häufigkeitsanalyse ergibt ferner für diese Wirbel ein leichtes Überwiegen von $w' < 0$ und somit $u' > 0$ (Beitrag zu $-u'w'$ 52% gegenüber 43% von $w' > 0$ und $u' < 0$); das bedeutet, daß man es vorwiegend mit einem Abwärtstransport von "zu großem" Horizontalimpuls zu tun hat, die kompensierende Aufwärtsbewegung überwiegt etwas bei $u'w' > 0$.

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen: in der turbulenten atmosphärischen Grenzschicht gibt es deutliche großskalige Strukturen - was bspw. der eindeutige Verlauf der Kreuzkorrelationsfunktionen zeigt - die anisotrop und inhomogen sind. Sie bewerkstelligen im wesentlichen den vertikalen Impulstransport. Ebenso kann man angeben, welche Wirbelgrößen den Hauptteil der kinetischen Energie - oder besser für jede Komponente den Hauptteil der Varianz - enthalten. Zur Beschreibung dieser Wirbel ist es nicht allein ausreichend, die Längenskalen L_{ux} , L_{uy} , L_{uz} , L_{vx} , ... anzugeben, die man aus den Korrelationsfunk-

tionen erhält, denn es handelt sich offenbar nicht um senkrecht stehende Gebilde. Die Kreuzkorrelationsfunktionen von Wind-schwankungen in verschiedenen Höhen zeigen vielmehr, daß diese Wirbel nach vorn geneigt sind mit - zumindest in Bodennähe bis 7 m - einem sehr flachen Neigungswinkel. Lediglich die kleineren , die die Varianz der Vertikalkomponente enthalten, haben eine Neigung von etwa 45° , diese Wirbel sind auch nicht so stark in Strömungsrichtung gestreckt und eher als "rund" zu bezeichnen.

8. Schlußanmerkungen

Die Ergebnisse zeigen, daß man die großskaligen turbulenten Vorgänge in der Prandtl-Schicht nur verstehen kann, wenn man die räumliche und zeitliche Verteilung von Turbulenzstrukturen untersucht. Welche Auswertemethoden dafür geeignet sind, zeigt die vorliegende Arbeit am Beispiel eines Turbulenzfeldes bei nahezu neutraler Schichtung über einem bestimmten Untergrund, das in drei Höhen bis 7 m Höhe in seinem zeitlichen Ablauf vermessen wurde.

Um die quantitativen Ergebnisse besser einschätzen zu können, sind ergänzende Untersuchungen angebracht, die z.T. schon durchgeführt wurden.

Folgende Gesichtspunkte sind dabei wesentlich:

- a) Erfassung der lateralen Korrelation, da die Turbulenz dreidimensional ist. In dieser Arbeit wurden an den entsprechenden Stellen Ergebnisse aus der Literatur angeführt. 1975 wurde in Garching bei München ein Experiment mit dieser Zielrichtung durchgeführt (SUMEX); die Ergebnisse sollen später veröffentlicht werden.
- b) Ausdehnung der Messungen auf größere Höhen. Auch hierzu wurden Ergebnisse anderer Autoren zitiert. Es soll versucht werden, bei dem 1979 im Rheintal geplanten Experiment im Rahmen des DFG-Schwerpunktes "Physikalische Grundlagen des Klimas und Klimamodelle" Turbulenzmessungen an Türmen durchzuführen. Ferner sollen vorhandene Turmmessungen mit genügend hoher zeitlicher Auflösung ausgewertet werden.

- c) Untersuchungen über unterschiedlichem Untergrund. Welchen Einfluß die Bodenbeschaffenheit auf die großen Turbulenzelemente hat, kann man nur durch den Vergleich von Meßergebnissen erfahren, die über verschiedenen Rauigkeiten gewonnen wurden. Vielleicht kann auch hier SUMEX einen Anhaltspunkt bieten, da die Messungen über einem anfangs reifen und später abgeernteten Getreidefeld stattfanden.
- d) Einfluß der thermischen Schichtung auf die Turbulenzstrukturen. Der Einfluß der Schichtung ist sehr gravierend, er kann bis zur Auflösung von Turbulenz führen. Es gibt bereits viele Untersuchungen mit dieser Fragestellung.
- e) Auswirkungen von Inhomogenitäten in Untergrund und Schichtung. Ein plötzlicher Wechsel der Rauigkeit oder der Temperatur des Bodens (bspw. beim Übergang vom Land auf das Meer oder von der Stadt auf das Umland) beeinflussen zweifellos die Struktur der Turbulenz. Dieses sehr interessante Problem kann jedoch erst mit Erfolg behandelt werden, wenn die vorher genannten Punkte in ihrer Wirkung besser bekannt sind.

9. Literaturverzeichnis

R.A.ANTONIA, J.D.ATKINSON

"High-order moments of Reynolds shear stress fluctuations
in a turbulent boundary layer"

Journ.of Fluid Mech., Vol.58, Part 3, 1973, S.581-593

N.Z.ARIEL', Y.D.NADEZHINA

"Dimensionless turbulence characteristics under various
stratification conditions"

Izvest., Atm.Oceanic Physics, Vol.12, No.8, 1976, S.802-809

G.K.BATCHELOR

"The theory of homogeneous turbulence"

Cambridge, University Press, 1956

R.BEYER, R.ROTH

"GREIV I 1974, Meßdaten"

Ber.d.Inst.f.Met.u.Klimat.d.Techn.Univ.Hannover, Nr.16, 1976

K.BREMHORST, T.B.WALKER

"Spectral measurements of turbulent momentum transfer in
fully developed pipe flow"

Journ.of Fluid Mech., Vol.61, Part 1, 1973, S.173-186

W.BRUTSAERT

"On the anisotropy of the eddy diffusivity"

Journ.of the Met.Soc.of Japan, Vol.48, No.5, 1970, S.411-416

N.E.BUSCH, S.E.LARSEN

"Spectra of turbulence in the atmospheric surface layer"

Danish Atomic Energy Commission, Research Establishment
Risø, Risø Report No.256, 1972, S.187-207

N.E.BUSCH, H.TENNEKES, H.A.PANOFISKY

"Turbulence structure in the planetary boundary layer"
Part I: "The surface layer"

Boundary Layer Meteorology 4, 1973, S.212-240

O.CHIBA

"The scale of turbulence in the atmospheric surface layer"
Journal of the Met.Soc.of Japan, Vol.54, No.3, 1976
S.187-190

E.CHOI CHEONG CHUEN

"Correlation and spectral functions of atmospheric turbulence"
Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo 1971

H.-W.DANNECKER

"Kreuzkorrelationen der turbulenten Windgeschwindigkeit
zur Untersuchung der Turbulenzstruktur in der Grenzschicht"
Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1973

A.G.DAVENPORT

"The spectrum of horizontal gustiness near the ground in
high winds"
Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 87, 1961, S.194-211

E.L.DEACON

"Gust variation with height up to 150 m"
Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 81, 1955, S.562-573

J.A.DUTTON, D.G.DEAVEN

"Some observed properties of atmospheric turbulence"
Lecture Notes in Physics, 12, Statistical Models and Tur-
bulence, Springer Verlag Berlin, 1972, S.352-383

A.J.DYER

"A review of flux-profile relationships"
Boundary Layer Meteorology 7, 1974, S.363-372

F.FIEDLER, C.FREYTAG

"Spektrale Analyse turbulenter Flüsse von Impuls und Wärme
in der Prandtl-Schicht"
Berichte über Arbeiten in der Gruppe EXPEG, Ber.d.Inst.f.
Meteorologie und Klimatologie der Tech.Univ.Hannover, 1977,
S.98-105

C.FREYTAG

"Statistische Eigenschaften der Energiedissipation"
Wiss.Mitt.Met.Inst.München, Nr.27, 1976

C.FREYTAG

"Untersuchungen zur Turbulenzstruktur in der bodennahen
Luftschicht"
Berichte über Arbeiten in der Gruppe EXPEG, Ber.d.Inst.f.
Meteorologie und Klimatologie d.Techn.Univ.Hannover, 1977,
S.87-97

H.L.GRANT

"The large eddies of turbulent motion"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.4, 1958, S.149-190

D.A.HAUGEN, J.C.KAIMAL, E.F.BRADLEY

"An experimental study of Reynolds stress and heat flux
in the atmospheric surface layer"
Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 97, 1971, S.168-180

W.HEISENBERG

"Zur statistischen Theorie der Turbulenz"
Zeitschrift für Physik 124, Nr.7-12, 1948, S.628-657

B.HENNEMUTH

"Strömungsgesetze in turbulenten Strömungen über glatten
und rauen Oberflächen"
Diplomarbeit, Universität zu Köln, 1974

M.HINO

"Spectrum of gusty wind"
Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo 1971

J.O.HINZE

"Turbulence"
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London,
1959

J.C.KAIMAL, D.A.HAUGEN

"Characteristics of vertical velocity fluctuations observed on a 430-m tower"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 93, 1967, S.305-317

J.C.KAIMAL, J.C.WYNGAARD, Y.IZUMI, O.R.COTÉ

"Spectral characteristics of surface-layer turbulence"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 98, 1972, S.563-589

L.S.G.KOVAZNAY, V.KIBENS, R.F.BLACKWELDER

"Large scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer"

Journal of Fluid Mechanics, Vol.41, Pt.2, 1970, S.283-325

J.L.LUMLEY

"Spectral energy budget in wall turbulence"

The Physics of Fluids, Vol.7, No.2, 1964, S.190-196

J.L.LUMLEY

"Invariants in turbulent flow"

The Physics of Fluids, Vol.9, No.11, 1966, S.2111-2113

J.L.LUMLEY, H.A.PANOFSKY

"The structure of atmospheric turbulence"

John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1964

P.B.MacCready

"Structure of atmospheric turbulence"

Journal of Meteorology, Vol.10, 1953, S.434-449

G.A.McBEAN

"The turbulent transfer mechanisms: A time domain analysis"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 100, 1974, S.53-66

G.A.McBean, J.A.ELLIOTT

"The vertical transports of kinetic energy by turbulence and pressure in the boundary layer"

Journal of the Atm.Sciences, Vol.32, 1975, S.753-766

G.A.McBEAN, M.MIYAKE

"Turbulent transfer mechanisms in the atmospheric surface layer"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 98, 1972, S.383-398

T.MIZUNO

"Space-time correlations measured by two tethered balloons"

Journal of the Met.Soc.of Japan, Vol.54, No.3, 1976,
S.182-186

A.S.MONIN, A.M.YAGLOM

"Statistical fluid mechanics"

MIT Press, Cambridge (Mass.), London, 1971, 1975

G.NAITO, J.KONDO

"Spatial structure of fluctuating components of the horizontal wind speed above the ocean"

Journal of the Met.Soc.of Japan, Vol.52, No.5, 1974,
S.391-399

G.R.OFFEN, S.J.KLINE

"A proposed model of the bursting process in turbulent boundary layers"

Journal of Fluid Mechanics, Vol.70, Part 2, 1975,
S.209-228

H.A.PANOFISKY

"Scale analysis of atmospheric turbulence at 2 m"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 88, 1962, S.57-69

H.A.PANOFISKY

"Determination of stress from wind and temperature measurements"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 89, 1963, S.85-93

H.A.PANOFISKY

"Turbulence structure in the planetary boundary layer"

Part II: "The boundary layer above 30 m"

Boundary Layer Meteorology 4, 1973, S.251-264

H.A.PANOFSKY, I.A.SINGER

"Vertical structure of turbulence"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 91, 1965, S.339-344

R.A.PIELKE, H.A.PANOFSKY

"Turbulence characteristics along several towers"

Boundary Layer Meteorology 1, 1970, S.115-130

L.PRANDTL

"Strömungslehre"

F.Vieweg Sohn, Braunschweig, 1944

T.H.PRIES

"Wind distribution asymmetry in the lowest 90 meters and its effect on diffusion"

Journal of Applied Met., Vol.9, 1970, S.588-591

K.N.RAO, R.NARASIMHA, M.A.B.NARAYANAN

"The 'bursting' phenomenon in a turbulent boundary layer"

Journal of the Fluid Mechanics, Vol. 48, Part 2, 1971
S.339-352

C.F.ROPELEWSKI, H.TENNEKES, H.A.PANOFSKY

"Horizontal coherence of wind fluctuations"

Boundary Layer Meteorology 5, 1973, S.353-363

R.ROTH

"GREIV I - ein meteorologisches Grenzschichtexperiment in Meppen/Ems (16.-30.April 1974)"

Berichte über Arbeiten in der Gruppe EXPEG, Ber.d.Inst.f. Met.u.Klimat.d.Techn.Univ.Hannover, 1977, S.125-127

J.C.ROTTA

"Turbulente Strömungen"

B.G.Teubner, Stuttgart, 1972

V.K.SHARAN

"Characteristics of natural wind - Pt.II: Turbulent flow"

Indian Journal Met.Hydrol.Geophys., Vol.26, 1, 1975, S.11-28

V.K.SHARAN

"Characteristics of atmospheric turbulence in near neutral stability"

Indian Journ.Radio & Space Physics, Vol.5, 1976, S.205-216

M.SHIOTANI

"Turbulence measurements at the sea coast during high winds"

Journ.of the Met.Soc.Japan, Vol.53, No.5, 1975, S.340-354

M.SHIOTANI, Y.IWATANI

"Horizontal space correlations of velocity fluctuations during strong winds"

Journ.of the Met.Soc.Japan, Vol.51, No.1, 1976, S.59-67

V.SITARAMAN

"Spectra and Cospectra of turbulence in the atmospheric surface layer"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 96, 1970, S.744-749

A.-S.SMEDMAN-HÖGSTRÖM, U.HÖGSTRÖM

"Spectral gap in surface-layer measurements"

Journal of the Atm.Sciences, Vol.32, 1974, S.340-350

J.STRAKA, F.FIEDLER, H.HINZPETER

"On the spectral transfer of atmospheric turbulence as related to observed spectra of turbulent energy and temperature variance"

1976, erscheint in Beitr.z.Physik d.Atmosphäre

R.N.SWANSON, H.E.CRAME

"A study of lateral and longitudinal intensities of turbulence"

Journal of Applied Met., Vol.4, 1965, S.409-417

J.TAUBENHEIM

"Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten"

Geophys.Monographien, Bd.5, Akadem.Verlagsges.Leipzig, 1969

H.TENNEKES, J.L.LUMLEY

"A first course in turbulence"

MIT Press, Cambridge (Mass.), London, 1974

A.A.TOWNSEND

"The structure of turbulent shear flow"

Cambridge, University Press, 1956

D.J.TRITTON

"Some new correlation measurements in a turbulent boundary layer"

Journal of Fluid Mechanics, Vol.28, Part 3, 1967, S.439-462

Y.VOLKOV, B.M.KOPROV, T.K.KRAVCHENKO

"Vertical correlation functions in the turbulence fields in the atmospheric surface layer"

Izvest., Atm.Oceanic Physics, Vol.11, No.8, 1975, S.794-801

Ch.WAMSER

"Über die Struktur der Turbulenz in der planetarischen Grenzschicht unter Berücksichtigung des Einflusses unterschiedlicher Rauigkeiten"

Ber.Inst.f.Radiomet.u.Marit.Met. Univ.Hamburg, Inst.d. Fraunhofer-Ges., Nr.31, 1976

H.S.WEILER, R.W.BURLING

"Direct measurements of stress and spectra of turbulence in the boundary layer over the sea"

Journal of the Atm.Sciences, Vol.24, 1967, S.653-664

M.L.WESELY

"Magnitudes of turbulent fluctuations in the atmospheric surface layer"

Symp.Atm.Diff.and Air Poll., Sept.9-13, 1974, Santa Barb., Cal., Reprints, Ann.Met.Soc. 15-18

F.WIPPERMANN

"Die turbulenten Transporte in der bodennächsten Atmosphärenschicht infolge erzwungener Konvektion"

Archiv f.Met.Geophys.Bioklimat., Serie A, Bd.17, 1968,
S.153-171

J.C.WYNGAARD, O.R.COTÉ

"Cospectral similarity in the atmospheric surface layer"

Quarterly Journal of the Roy.Met.Soc. 98, 1972, S.590-603

G.YAMAMOTO

"Generalization of the KEYPS formula in diabatic conditions and related discussion on the critical Richardson number"

Journ.of the Met.Soc.of Japan, Vol.53, No.3, 1975,
S.189-194

V.V.YEFIMOV, V.L.POSOSHKOV, A.A.SIZOV

"Vertical interaction of longitudinal wind velocity components in the marine atmospheric surface layer"

Izvest., Atm.Oceanic Physics, Vol.11, No.9, 1975, S.964-967

10. Liste der verwendeten statistischen Begriffe und Funktionen

Integralstatistik (Statistik von Zufallsgrößen)

Momente eines stationären Zufallsprozesses $\alpha(t)$

(vgl. TAUBENHEIM (1969), S.41f, S.221ff, S.245ff)

1.Moment = Mittelwert
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t') dt'$$

die höheren Momente werden zweckmäßigerweise auf den Mittelwert bezogen ("Zentralmomente") mit $\alpha'(t) = \alpha(t) - \bar{\alpha}$

2.Moment = Varianz
$$\overline{\alpha'^2} = \sigma_{\alpha}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha(t') - \bar{\alpha})^2 dt'$$

Schiefe = normiertes 3.Moment
$$S_{\alpha} = \frac{\overline{\alpha'^3}}{(\sigma_{\alpha}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Kurtosis = normiertes 4.Moment
$$K_{\alpha} = \frac{\overline{\alpha'^4}}{(\sigma_{\alpha}^2)^2}$$

Kovarianz zweier Zufallsprozesse $\alpha(t)$ und $\beta(t)$

$$\overline{\alpha'\beta'} = \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha'(t') \beta'(t') dt'$$

Korrelationskoeffizient von α und β (normierte Kovarianz)

$$r_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{(\sigma_{\alpha}^2 \sigma_{\beta}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Verallgemeinerte Zentralmomente (Statistik von Zufallsprozessen)

und zugehörige Zeitskalen

Kovarianzfunktion zweier stationärer Zufallsprozesse $\alpha'(t)$ und $\beta'(t)$

$$R_{\alpha\beta}(\tau) = \overline{\alpha'(t) \beta'(t+\tau)}, \quad R_{\alpha\beta}(0) = \sigma_{\alpha\beta}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (normierte Kovarianzfunktion)
von $\alpha(t)$ und $\beta(t)$

$$C_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{R_{\alpha\beta}(\tau)}{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}} \quad , \quad C_{\alpha\beta}(0) = 1$$

mit Zeitskalen: Mikroskala $\lambda_{\alpha\beta}$ $\lambda_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{-2}{\partial^2 C_{\alpha\beta} / \partial \tau^2}}$

Integralskala $L_{\alpha\beta}$ $L_{\alpha\beta} = \int_0^\infty C_{\alpha\beta}(\tau) d\tau$

Semiskala $L_{\alpha\beta}$ $C_{\alpha\beta}(L_{\alpha\beta}) = 0.5$

Für den Spezialfall $\alpha(t) = \beta(t)$ ist $R_{\alpha\alpha}(\tau)$ die Autokovarianzfunktion und $C_{\alpha\alpha}(\tau)$ die Autokorrelationsfunktion.

Kreuzspektrum von $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ (Fouriertransformierte der Kovarianzfunktion)

$$\Phi_{\alpha\beta}(f) = 2 \int_0^\infty R_{\alpha\beta}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

mit

$$2 \int_0^\infty \Phi_{\alpha\beta}(f) df = R_{\alpha\beta}(0) = \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}.$$

Das Kreuzspektrum läßt sich darstellen durch

$$\Phi_{\alpha\beta}(f) = Co_{\alpha\beta}(f) - iQ_{\alpha\beta}(f)$$

mit $Co_{\alpha\beta}(f)$ Cospektrum (Realteil des Kreuzspektrums)

$Q_{\alpha\beta}(f)$ Quadraturespektrum (Imaginärteil des Kreuzspektrums)

und

$$\frac{\Phi_{\alpha\beta}}{\sqrt{Co_{\alpha\alpha}(f)Co_{\beta\beta}(f)}} = Coh_{\alpha\beta}(f) \exp(iPh_{\alpha\beta}(f))$$

mit $Coh_{\alpha\beta}(f)$ Kohärenzspektrum

$Ph_{\alpha\beta}(f)$ Phasenspektrum.

Die Zeitskalen sind $\Lambda_{\alpha\beta}$ Periodendauer des Maximums des Cospektrums,

$\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}$ Periodendauer, bei der das Kohärenzspektrum auf 0.5 abgefallen ist.

Für den Spezialfall $\alpha(t) = \beta(t)$ ist $\Phi_{\alpha\alpha} = Co_{\alpha\alpha}$ das Energiespektrum ($Q_{\alpha\alpha} = 0$, $Coh_{\alpha\alpha} = 1$).

Man kann die Funktionen für stochastische Prozesse im Zeitbereich übertragen auf stochastische Prozesse im Ortsbereich. Der räumliche Mittelwert etwa bzgl. der x_1 -Koordinate ist dann

$$\overline{\alpha}(y,z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(x',y,z) dx'.$$

Der Stationarität im Zeitbereich entspricht die Homogenität im Ortsbereich.

Bei Messungen in turbulenten Strömungen kann man unter der Voraussetzung $\bar{u} \gg u'$ (Taylor-Hypothese, vgl. HINZE (1959), S.41) Zeitreihen und ihre statistischen Funktionen umrechnen auf Ortsfunktionen in Richtung der mittleren Windgeschwindigkeit.

Die in dieser Arbeit verwendeten Zufallsprozesse sind die Windfluktuationen in verschiedenen Höhen $u_i'(z,t)$ bzw. $u_i'(z,x)$, $i=1,2,3$.

Die Kovarianzfunktionen und die zugehörigen Spektren wurden berechnet

a) für Prozesse, die an derselben Stelle (d.h. in derselben Höhe) gemessen wurden für Ortsverschiebungen r_1 in x-Richtung

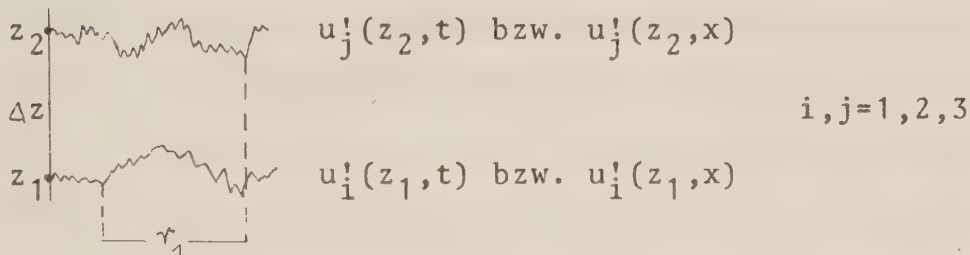
$$\begin{array}{lcl} \text{[Diagramm: Zwei Zeitreihen mit einer Verschiebung r_1]} & u_i'(z,t) \text{ bzw. } u_i'(z,x) & \\ & & i,j=1,2,3 \\ & u_j'(z,t) \text{ bzw. } u_j'(z,x) & \end{array}$$

$$C_{u_i u_j}(z, r_1) = \overline{u_i^!(z, x) u_j^!(z, x + r_1)} = C_{ij}(z, r_1)$$

mit Mikroskala λ_{ij1} , Integralskala L_{ij1} und Semiskala $\tilde{L}_{ij1}$,

$$\Phi_{u_i u_j}(z, \kappa_1) = \Phi_{ij}(z, \kappa_1) \quad \text{mit Längenskala } \Lambda_{ij1} = \text{Maximum-} \\ \text{wellenlänge des Cospektrums.}$$

- b) für Prozesse, die an verschiedenen Orten (d.h. in verschiedenen Höhen) gemessen wurden für Ortsverschiebungen r_1 in x-Richtung



$$C_{u_i u_j}(z, r_1, \Delta z) = \overline{u_i^!(z, r_1) u_j^!(z + \Delta z, r_1)} = C_{ij}(z, r_1, \Delta z)$$

mit Längenskala $\mathcal{L}_{ij1}$ = Verschiebung, bei der die Korrelationsfunktion ein Maximum hat,

$\mathcal{L}_{ij1}^+$ für positive Verschiebungen,

$\mathcal{L}_{ij1}^-$ für negative Verschiebungen.

und

$$\Phi_{u_i u_j}(z, \kappa_1, \Delta z) = \Phi_{ij}(z, \kappa_1, \Delta z)$$

mit Längenskala $\tilde{\Lambda}_{ij1}$ = Wellenlänge, bei der das Kohärenzspektrum auf 0.5 abgefallen ist.

11. Liste der verwendeten Symbole

Zeichen	Bedeutung	definierende Gleichung
B	BIRKHOFF'sche Invariante	(4.5)
$C_{ij}(\vec{r})$	Korrelationsfunktion von u_i' und u_j'	
$Co_{ij}(\vec{k})$	Cospektrum von u_i' und u_j'	(2.33)
	$Co_{ii}(\vec{k})$ auch $Co_i(\vec{k})$	
$Co_{ip}(\vec{k})$	Cospektrum von u_i' und p'	
$Co_{i,jk}(\vec{k})$	Cospektrum von u_i' und $u_j' u_k'$	
$Coh_{ij}(\vec{k})$	Kohärenzspektrum von u_i' und u_j'	(3.18)
$E(k)$	dreidimensionales Energiespektrum für isotrope Turbulenz	(2.49)
$f(r)$	Längskorrelation von u_1'	(3.3a)
f	Frequenz in Hz	
$F(k)$	$E(k)/4\pi k^2$	(2.50)
$F_{ij}(k_1)$	eindimensionales Spektrum von u_i' und u_j' in k_1 -Richtung	(3.21)
$F_3(k)$	Spektralfunktion 3.Ordnung für isotrope Turbulenz	
g	Erdbeschleunigung	
$g(r)$	Querkorrelation von u_1'	(3.3b)
k	von-Kármán-Konstante	
$k(r)$	Dreifachkorrelation von u_1' in x-Richtung	
	$R_{11,1}(r,0,0)$	
l	Längenskala	
$L_{ij,k}$	Integralskala von u_i' und u_j' in x_k -Richtung, $L_{11,1}, L_{22,1}, L_{33,1}$ auch L_u, L_v, L_w	(3.11)

$\tilde{L}_{ij,k}$	Semiskala von u_i' und u_j' in x_k -Richtung $\tilde{L}_{11,1}, \tilde{L}_{22,1}, \tilde{L}_{33,1}$ auch $\tilde{L}_u, \tilde{L}_v, \tilde{L}_w$	(3.12)
$\mathcal{L}_{ij,k}^+$ $\mathcal{L}_{ij,k}^-$	Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion von u_i' und u_j' in verschiedenen Höhen für positive und negative Verschiebungen in x_k -Richtung (s.S.)	
L_*	Stabilitätsparameter, $L_* = - \frac{u_*^3 c_p \varrho \bar{\Theta}}{kgH}$ mit c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck H = Strom fühlbarer Wärme	
n	dimensionslose Frequenz, $n = \frac{fz}{u}$ oder dimensionslose Wellenzahl $n = \kappa z$	
p	atmosphärischer Druck	
$Ph_{ij}(\vec{k})$	Phasenspektrum von u_i' und u_j'	(3.17)
$Q_{ij}(\vec{k})$	Quadraturespektrum von u_i' und u_j'	(2.34)
$Q_{ip}(\vec{k}), Q_{i,jk}(\vec{k})$	vgl. $Co_{ip}(\vec{k}), Co_{i,jk}(\vec{k})$	
$\vec{r}$	Ortsverschiebung ("space lag") $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = \Delta \vec{x}$, r_1 auch r_x	
r_{ij}	Rotationstensor des Windfeldes	(2.54)
r_{uw}	Korrelationskoeffizient von u' und w'	
$R_{ij}(\vec{r})$	Kovarianzfunktion von u_i' und u_j' , R_{ij} auch $R_{u_i u_j}$	
$R_{ip}(\vec{r})$	Kovarianzfunktion von u_i' und p'	
$R_{i,jk}(\vec{r})$	Kovarianzfunktion von u_i' und $u_j' u_k'$	
Re	Reynolds-Zahl, $Re = \frac{\bar{u}z}{\nu}$, $\bar{u}$, z und ν sind die für die betrachtete Strömung charakteristische Geschwindigkeit, Länge und molekulare Viskosität	
Ri	Richardson-Zahl, $Ri = - \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{d\bar{\Theta}/dz}{(\bar{u} dz)^2}$	
R_f	Richardson-Fluß-Zahl, $R_f = \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{H}{c_p u_*^2 (\bar{u} dz)^2} = \frac{K_H}{K_M} Ri$ mit K_H und K_M Austauschkoeffizienten für Wärme und Impuls	

s_{ij}	Dehnungstensor des Windfeldes	(2.54)
t	Zeit	
T	Meßzeitraum	
$\vec{u}$	Windvektor, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$	
u_*	Schubspannungsgeschwindigkeit, $u_* = \sqrt{-\vec{u} \cdot \vec{w}}$	
v_H	Horizontalwind, $v_H = \sqrt{u^2 + v^2}$	
$\vec{x}, \vec{x}^*, \vec{x}^{**}, \vec{x}^+$	Ortsvektoren, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$	
$\Delta \vec{x}$	Differenz zweier Ortsvektoren, Ortsverschiebung, $\Delta \vec{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \vec{r}$	
z_0	Rauhigkeitsparameter	
α, β	Winkel der Vorwärts- und Rückwärtsneigung von Korrelationsgebieten	
δ_0	Grenzschichtdicke	
θ	potentielle Temperatur, in Bodennähe Lufttemperatur	
$\vec{\kappa}$	Wellenzahlvektor, $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$	
$\lambda_{ij,k}$	Mikroskala von $u_i^!$ und $u_j^!$ in κ_k -Richtung	(3.13)
$\Lambda_{ij,k}$	Wellenlänge (Kehrwert der Wellenzahl) des Maximums im Cospektrum von $u_i^!$ und $u_j^!$ für Wellenzahlen in κ_k -Richtung	
$\tilde{\Lambda}_{ij,k}$	$\Lambda_{11,1}, \Lambda_{22,1}, \Lambda_{33,1}$ auch $\Lambda_u, \Lambda_v, \Lambda_w$ Wellenlänge, bei der das Kohärenzspektrum von $u_i^!$ und $u_j^!$ in κ_k -Richtung auf 0.5 abgefallen ist	
Λ	LOITSIANSKII-Invariante	(4.3)
ν	Viskosität der Luft ($\approx 0.14 \text{ cm}^2/\text{s}$)	
ρ	Dichte der Luft ($\approx 1.2 \text{ mg/cm}^3$)	

σ_i^2	Varianz der Windfluktuation u_i' , $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ auch $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2$	
σ_{uw}^2	Varianz von $u'w'$	
τ	Zeitverschiebung	
$\Phi_{ij}(\vec{k})$	komplexes Spektrum von u_i' und u_j'	(2.29)
$\Phi_M(\frac{z}{L_*})$	Stabilitätszahl	(5.4)
$\Psi(\frac{z}{L_*})$	Stabilitätskorrektur des logarithmischen Windprofils	(5.3)
$\vec{\omega}$	Vorticityvektor, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \vec{\nabla} \times \vec{u}$	

Dank

Abschließend möchte ich Herrn Prof.Dr.G.Hofmann herzlich für die Betreuung dieser Arbeit danken; er und die Mitarbeiter des Meteorologischen Instituts haben durch Anregungen und Gespräche zur Entstehung der Arbeit beigetragen. Ganz besonders danke ich Herrn Dr.C.Freytag für viele fruchtbare Diskussionen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts sowie für die Bereitstellung einiger Auswerteprogramme. Die Meßdaten verdanke ich Herrn Dr.C.Freytag, Herrn K.Häckl und Herrn H.Schweiger; die Meßkampagne wurde von der DFG finanziert. St.Zeno bin ich für die Intuition zu großem Dank verpflichtet. Herr Dr.H.J.Oberle hat mich in mathematischen Fragen beraten. Ferner danke ich Frau Ch.Köhnlein, die die Photoarbeiten durchgeführt hat und an der Fertigstellung des Manuskripts beteiligt war.

Lebenslauf

von Barbara Hennemuth

Geboren am 17.2.1950 in Fulda als Tochter des Kaufmanns
Otto Hennemuth und seiner Frau Margret, geb. Zienow,
1956 bis 1960 Besuch der Volksschule in Essen,
1960 bis 1968 Besuch des Gymnasiums in Essen,
Mai 1968 Erlangung der Hochschulreife durch das Reifezeugnis
des Sozialwissenschaftlichen Gymnasiums,
1968 bis 1972 Studium der Meteorologie an der Universität zu
Köln,
Sommer 1972 mündliche Diplomprüfung in Köln,
1972 Wechsel an die Ludwig-Maximilians-Universität München,
Anfertigung der Diplomarbeit mit dem Titel: "Strömungsgesetze
in turbulenten Strömungen über glatten und rauhen Oberflächen",
Februar 1974 Bestehen der Diplom-Hauptprüfung für Meteorologie
an der Universität zu Köln,
seit April 1974 Beschäftigung als Verwalter der Dienstgeschäfte
eines wissenschaftlichen Assistenten am Meteorologischen Insti-
tut der Universität München.

Wissenschaftliche Mitteilungen des Meteorologischen Instituts der Universität München

- Nr. 1⁺ BAUMGARTNER, A.: Meteorologische Untersuchungen bei Frostschutzmaßnahmen im Pflanzgarten Grafrath, 1953.
- Nr. 2⁺ POHL, W.: Untersuchungen an einem Strahlungsbilanzmesser, 1954.
- Nr. 3⁺ Erfahrungen und Überlegungen zur Meßmethodik bei meteorologischen Untersuchungen im Gelände, 1956.
GEIGER, R.: Der Forschungswagen für mikrometeorologische Untersuchungen.
FIMPEL, H.: Das elektrische Psychrometer für den Forschungswagen.
HOFMANN, G.: Die Temperaturmessung als Basis meteorologischer Meßverfahren.
KRAUS, H.: Untersuchungen und Entwicklungsarbeiten mit Thermistoren.
FIMPEL, H.: Über den Einfluß der dauernden Wasserzufuhr beim Psychrometer.
HOFMANN, G.: Die beidseitig freie Tauplatte.
- Nr. 4⁺ BAUMGARTNER, A.: Beobachtungswerte und weitere Studien zum Wärme- und Wasserhaushalt eines jungen Waldes, 1957.
- Nr. 5 HOFMANN, G.: Meteorologisches Instrumentenpraktikum, 1960.
- Nr. 6 KORB, G.: Absorption von Sonnenstrahlung in Wolken, 1961.
- Nr. 7 HOFMANN, G. und KRAUS, H.: Der Aufbau der meteorologischen Station beim Forschungsreaktor München, 1962.
HOFMANN, G. und KRAUS, H.: Ein Gerät zur digitalen Registrierung von Temperatur und Windgeschwindigkeit.
- Nr. 8⁺ HOFMANN, G., KRAUS, H. und MANIER, G.: Ergebnisse der Messungen von Temperatur- und Windschichtung an der meteorologischen Station beim Forschungsreaktor München vom 1. Juli 1961 bis zum 28. Februar 1962, 1962.
- Nr. 9 Prof. Dr. Rudolf Geiger zum 70. Geburtstag, 1964:
KLEINLEIN, G.: Klimaverwerfung und Forstwirtschaft.
LORENZ, D.: Der Einfluß des Absorptionsvermögens von Bodenoberflächen im Langwelligen auf die Messung der Bodenoberflächentemperatur mit Radiometern.
REITER, R.: Erste Ergebnisse gleichzeitiger Registrierungen der Globalstrahlung im kurzwelligen Ultraviolett in verschiedenen Höhen mit Hilfe UV-empfindlicher Zählrohre.
POHL, W.: Meteorologie und die Nutzung der Kernenergie.
GEBHART, R.: Untersuchungen an Strahlungsschutzhütten.
VAUPEL, A.: Logik und Bio-Logik.
ROTH, R.: Die höhenabhängige Änderung der Windrichtung in der bodennahen Luftschicht.
HOFMANN, G.: Ein Schalenkreuzanemometer ohne Anlaufgeschwindigkeit.
FIMPEL, H.: Messung der Temperatur einer Grasoberfläche mit einem Gesamtstrahlungspyrometer.
KRAUS, H.: Die Entstehung von Straßenglätte durch gefrorenen Tau, Reif und Beschlag.
- Nr. 10⁺ ROTH, R.: Ein Gerät zur Untersuchung der kurzfristigen Schwankungen meteorologischer Parameter, 1965.
KARSTENSEN, H.: Ein Analog-Digital-Umsetzer mit Tonbandspeicher zur Untersuchung von Schwankungen meteorologischer Parameter.
- Nr. 11 Tabellen der Stundenmittel von Lufttemperatur, Feuchttemperatur und Windgeschwindigkeit in 2, 5, 10, 20 und 50 m Höhe für die Jahre 1962 und 1963, 1967.
- Nr. 12⁺ TAJCHMAN, St.: Energie- und Wasserhaushalt verschiedener Pflanzenbestände bei München, 1967.
- Nr. 13 ULLRICH, R.B.: Das Temperatur- und Windprofil an der meteorologischen Station beim Forschungsreaktor München, 1967.
- Nr. 14 SCHÖLLMANN, E.: Statistische Bearbeitung der an der meteorologischen Station beim Forschungsreaktor München gewonnenen Meßdaten, 1968.
- Nr. 15 SCHÖNWIESE, Ch.D.: Spektrale Varianzanalyse klimatologischer Reihen im langperiodischen Bereich, 1969.
- Nr. 16 BERZ, G.: Untersuchungen zum Wärmehaushalt der Erdoberfläche und zum bodennahen atmosphärischen Transport, 1969.

+) vergriffen

- Nr. 17 KLEMMER, L.: Die Periodik des Radialzuwachses in einem Fichtenwald und deren meteorologische Steuerung, 1969.
- Nr. 18 FIEDLER, F.: Klimawerte zur Temperatur- und Windschichtung in den untersten 50 m der Atmosphäre, 1970.
- Nr. 19 PAESLER, M.: Die Temperaturmessungen in München 1781 - 1968, 1970.
- Nr. 20 WALK, O.G.: Zur Interpretation von Energie-, Ko- und Quadratspektren meteorologischer Parameter, 1970.
- Nr. 21 Prof. Dr. F. Möller zum 65. Geburtstag:
Vorträge der Klausur-Tagung der Meteorologischen Institute der Universität München in Leoni vom 24. - 26.2.1971, 1971.
- Nr. 22 STRAUSS, R.: Energiebilanz und Verdunstung eines Fichtenwaldes im Jahre 1969, 1971.
- Nr. 23 BAUMGARTNER, A., PAESLER, M. und STRAUSS, R.: Temperaturmessungen in München 1781 - 1968 - Monatsmittel, Extremwerte und Anzahl besonderer Tage, 1972.
- Nr. 24 SCHÖNWIESE, Chr.-D.: Schwankungsklimatologie im Frequenz- und Zeitbereich. 1974.
- Nr. 25 BAUMGARTNER, A. und GIETL, G.: Globalstrahlung in München 1960-1974, 1975
- Nr. 26 HAGER, H.: Kohlendioxyd, -Konzentrationen, -Flüsse und -Bilanzen in einem Fichtenhochwald, 1975.
- Nr. 27 FREYTAG, C.: Statistische Eigenschaften der Energiedissipation. 1976
- Nr. 28 ABEL, H., BAUMGARTNER, A., DONLE, W.: Energie- und Wasserumsätze bei der Atmung. 1977.
- Nr. 29 KRIEBEL, K.T.: Reflection Properties of Vegetated Surfaces: Tables of Measured Spectral Biconical Reflectance Factors, 1977.
- Nr. 30 KÖPKE, P.: Bestimmung der atmosphärischen Trübung mittels geostationärem Satelliten. 1977
- Nr. 31 KIRCHNER, M.: Anthropogene Einflüsse auf die Oberflächenalbedo und die Parameter des Austausches in der Grenze Erde/Atmosphäre.

